

Л. Гаррис

**МАГНИТО-
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ
ТЕЧЕНИЯ
В КАНАЛАХ**

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ

**HYDROMAGNETIC
CHANNEL FLOWS**

by

L. P. HARRIS

Technology Press of
the Massachusetts Institute of Technology

and

John Wiley and Sons, Inc.,

NEW YORK — LONDON

1960

Л. ГАРРИС

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ

Перевод с английского

Е. Ю. КРАСИЛЬНИКОВА, В. Б. ЛЕВИНА
и Д. С. КОВНЕРА

Под редакцией

В. В. ГОГОСОВА и Ю. С. РЯЗАНЦЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1963

Редакция литературы по физике

Предисловие редакторов перевода

Управляемые термоядерные реакции, магнитогидродинамические генераторы и насосы, ионные и плазменные двигатели — только часть проблем, решение которых в той или иной степени связано с развитием магнитной гидродинамики. Число публикуемых в этой области работ непрерывно растет. Многие частные вопросы, привлекавшие до недавнего времени внимание исследователей, теперь полностью разрешены. Однако есть область магнитной гидродинамики (представляющая огромный теоретический и практический интерес), в которой число работ пока едва ли превышает два-три десятка. Речь идет о турбулентных магнитогидродинамических течениях в каналах. Не говоря уже о том, что в магнитной гидродинамике исследование таких течений значительно сложнее, чем в обычной гидродинамике, положение еще более усугубляется отсутствием достаточного числа экспериментальных данных.

Ряд интересных работ, посвященных исследованию турбулентных магнитогидродинамических течений в каналах, появилось в последние годы в советской печати (см. список литературы в конце предисловия).

Книга Гарриса «Магнитогидродинамические течения в каналах» является единственной в настоящее время монографией по данному вопросу.

В ней разрабатывается метод приближенного расчета параметров турбулентного магнитогидродинамического течения электропроводной жидкости в постоянном и бегущем магнитных полях. Метод аналогичен «полуэмпирическим» методам расчета турбулентных течений в плоских каналах в обычной гидродинамике.

В первой главе кратко описывается содержание книги. Во второй главе излагается известное решение задачи

о турбулентном течении жидкости в плоской трубе в обычной гидродинамике.

В третьей главе система безразмерных уравнений магнитной гидродинамики записывается для осредненных величин и пульсационных составляющих. В четвертой главе теория, изложенная во второй главе, обобщается на случай течения электропроводной жидкости в постоянном поперечном магнитном поле. Профиль скорости, дефект скорости и коэффициент сопротивления выражаются через две произвольные функции, которые должны быть либо определены из эксперимента, либо найдены с помощью дополнительных гипотез.

Пятая глава посвящена описанию ставших уже классическими экспериментов Гартмана и Лазаруса и Мергетройда по течениям ртути в постоянном магнитном поле.

В шестой главе сформулированы основные допущения, необходимые для получения дальнейших результатов. В ней показывается, что одна из произвольных функций, введенных в четвертой главе, равна нулю, и находится выражение для другой функции.

В седьмой главе на основе результатов предыдущей главы построены графики профилей скорости для различных значений чисел Рейнольдса и Гартмана, а также даны распределения корреляций скорости по сечению канала.

В последующих двух главах дается приближенный анализ ламинарного и турбулентного течений электропроводной жидкости в бегущем магнитном поле.

В последней, десятой главе кратко анализируются полученные результаты.

В качестве дополнения в книгу включены основные статьи по турбулентным магнитогидродинамическим течениям, опубликованные в зарубежной печати. Эти статьи посвящены как теоретическим, так и экспериментальным исследованиям.

В статье 1 (Капур и Джайн) рассматривается турбулентное течение несжимаемой электропроводной жидкости в плоском канале в присутствии постоянного магнитного поля, параллельного стенкам. Получены некоторые

сведения о распределении осредненного давления, скорости и турбулентных пульсаций.

В статье 2 (Наполитано) в линейном приближении по магнитному полю исследуется турбулентный магнито-гидродинамический пограничный слой. Используя методы, известные из теории обычного турбулентного пограничного слоя, автор устанавливает модифицированный пристеночный закон, выводит формулу для поверхностного трения и вычисляет входящие в решение константы.

В статье 3 (Ликодис) рассматривается переход ламинарного магнито-гидродинамического подслоя в турбулентное течение. При этом используется формальная аналогия между влиянием на течение отсоса и магнитного поля.

Статья 4 — это опубликованная еще в 1937 г. работа Гартмана и Лазаруса, в которой содержится подробное описание экспериментов по изучению течения ртути в магнитном поле. Эта работа до сих пор является важным источником данных, необходимых для построения и проверки теории.

Описанные в статье 5 (Мергетройд) эксперименты могут рассматриваться как развитие исследований Гартмана и Лазаруса. В этих экспериментах изучено течение ртути в канале прямоугольного сечения при наличии поперечного магнитного поля при более высоких числах Рейнольдса и исследован переход ламинарного течения в турбулентное.

В статье 6 (Ленерт) приводятся результаты экспериментального изучения интересного случая неламинарного движения электропроводной жидкости в магнитном поле.

При редактировании перевода были обнаружены ряд опечаток и опечаток, которые были исправлены без специальных оговорок.

Книга будет полезна научным работникам — экспериментаторам и теоретикам, интересующимся вопросами, связанными с турбулентными течениями, магнито-гидродинамическими генераторами и насосами и т. д.

*В. В. Гогосов
Ю. С. Рязанцев*

ЛИТЕРАТУРА

- Кирко И. М., Клявинь Я. Я., Тютин И. А., Ульманис Л. Я., Научные доклады высшей школы, Энергетика, № 3 (1958).
- Кирко И. М., Лиелаусис О. А., в сборнике «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы», Изд-во АН Латв. ССР, 1959, стр. 295.
- Рябинкин А. Г., Хожайнов А. И., ЖТФ, 33, вып. 1 (1963). Прикладная магнитогидродинамика; Труды Института физики АН Латв. ССР, том XII, 1961. (Статьи: Брановер Г. Г., стр. 177; Брановер Г. Г., Кирко И. М., Лиелаусис О. А., стр. 167.)
- Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы, Изд-во АН Латв. ССР, 1962. (Статьи: Ваулин Е. П., Бабецкий В. И., стр. 83; Фрадкина Э. Ф., Козюков А. В., стр. 236; Брановер Г. Г., Лиелаусис О. А., стр. 575; Лиелаусис О. А., Цинобер А. Б., стр. 583; Брановер Г. Г., Лиелаусис О. А., стр. 587; Брановер Г. Г., Лиелаусис О. А., стр. 591.)

Из предисловия автора

Успехи современной науки и техники пробудили большой интерес к использованию явлений, описываемых магнитной гидродинамикой, — наукой о течениях проводящей жидкости при наличии электромагнитных полей. Десять лет назад эти явления интересовали лишь небольшую группу астрофизиков и геофизиков; сейчас почти каждый университет, а также многие лаборатории фирм и государственные лаборатории имеют штаты инженеров и ученых, работающих в области магнитной гидродинамики. Уже освоенные или находящиеся в стадии разработки технические приложения магнитной гидродинамики включают в себя использование индукционных насосов для проводящей жидкости, промышленное производство электроэнергии, удержание плазмы при осуществлении управляемой термоядерной реакции, а также управление полетом ракет и гиперзвуковых летательных аппаратов. Кроме того, нужно надеяться, что изучение этих явлений приведет к лучшему пониманию проблемы физики газов и строения космических тел.

В настоящей книге дан анализ трех типов течения вязкой несжимаемой электропроводной жидкости в каналах прямоугольного поперечного сечения с большим отношением сторон в присутствии поперечного магнитного поля. Рассматриваемые задачи — турбулентное течение в постоянном магнитном поле, а также ламинарное и турбулентное течения в бегущем магнитном поле — возникли в связи с первыми двумя из перечисленных технических приложений — электромагнитными насосами и генераторами. Эти течения принадлежат к числу простейших магнитогидродинамических течений.

Относительная простота этих течений связана с тем, что взаимодействие магнитного поля и движения жидкости происходит в одном направлении. Магнитное поле часто оказывает существенное влияние на движение жидкости, однако движение жидкости редко вызывает значительные изменения магнитного поля, поскольку обычно эти течения, как правило, характеризуются низкими значениями магнитного числа Рейнольдса. С точки зрения механики эти течения соответствуют обычным гидродинамическим течениям, в которых наложены дополнительные градиенты давления и касательные напряжения, обусловленные электромагнитными силами. С точки зрения электротехники они соответствуют обычным роторным машинам, в которых вращающиеся части заменены движущейся жидкостью, а момент вращения на оси — гидродинамическим давлением и трением.

Благодаря тесной связи между магнитогидродинамическими течениями в каналах и другими хорошо изученными инженерными проблемами устройства, использующие эти течения, представляют собой в настоящее время наиболее развитое техническое приложение магнитной гидродинамики. Около пяти лет назад было создано несколько типов электромагнитных насосов (включая индукционные насосы и насосы постоянного тока) для жидких металлов, которые используются в качестве теплоносителей в ядерных реакторах. Схемы магнитогидродинамических генераторов, которые долго были лишь мечтой изобретателей о преобразовании тепловой энергии в электрическую без использования сильно напряженных движущихся частей, стали в последнее время предметом строгих технических и экономических расчетов.

До сих пор технические приложения магнитогидродинамических течений ограничивались устройствами малой мощности, для которых коэффициент полезного действия не является основным параметром. Поэтому вопросы электромеханических взаимодействий в таких течениях представляют в основном теоретический интерес. Конструкторы насосов поступали правильно, используя опыт, накопленный при проектировании электрических двигателей, и отмеченную выше аналогию между магнито-

гидродинамическими насосами и электрическими двигателями, и не рассматривая в деталях механические свойства течений. Однако с увеличением мощности магнитогидродинамических аппаратов к. п. д. этих аппаратов и влияние структуры течения на их характеристики будут приобретать все большее значение. Основной целью предлагаемого анализа является развитие интуитивного представления о внутренней структуре турбулентного магнитогидродинамического течения и методов расчета распределения энергии в этих течениях.

Различия между данной работой и уже имеющимися работами в области турбулентных магнитогидродинамических течений обусловлены различием отправных точек анализа. Предыдущие исследователи исходили из решения, данного около двадцати лет назад Гартманом для ламинарных магнитогидродинамических течений, и пытались определить условия, вызывающие переход к турбулентному режиму, а также изменения структуры течения, возникающие в результате перехода. Наиболее соответствующий этому подходу физический эксперимент состоит в повышении перепада давления в ламинарном магнитогидродинамическом потоке, обусловленном градиентом давления, до тех пор, пока течение не станет турбулентным. В этой книге мы исходим из решений для обычного турбулентного течения в канале, полученных также более двадцати лет назад, и пытаемся определить изменения в структуре потока, возникающие при наложении возрастающего магнитного поля. Соответствующий этому подходу эксперимент состоит в том, что создается турбулентное течение проводящей жидкости под действием градиента давления, а затем накладывается поперечное магнитное поле, непрерывно возрастающее до тех пор, пока режим течения не станет ламинарным. Однако важные различия между этими двумя подходами к рассматриваемой задаче связаны не с соответствующими мысленными экспериментами, а скорее с характерными для них аналитическими методами. Исследователи, использующие первый подход, полагаются главным образом на математический аппарат теории электромагнитного поля и классической гидродинамики. Подход, принятый в данной работе, приводит,

естественно, к использованию полуэмпирических методов современной гидродинамики, состоящих в совместном применении основных математических соотношений, соображений теории размерностей и результатов экспериментов. Результаты данной работы говорят о том, что турбулентные магнитогидродинамические течения более близки к обычным турбулентным течениям, чем к ламинарным магнитогидродинамическим течениям.

Описанные здесь результаты взяты из докторской диссертации автора, представленной в Отделение электротехники Массачусетского технологического института.

Глава I

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Хотя магнитогидродинамические течения в каналах, используемые в технике, обычно являются турбулентными, а не ламинарными, нам очень мало известно о структуре турбулентных потоков, в которых существенны магнитогидродинамические эффекты. Главная цель настоящего исследования — дать основанный на полуэмпирических методах гидромеханики анализ внутренней структуры турбулентного магнитогидродинамического течения несжимаемой жидкости в канале прямоугольного поперечного сечения с большим отношением сторон при наличии постоянного поперечного магнитного поля. Кроме того, будет показано, что при определенных условиях решения, полученные для турбулентных течений в постоянном магнитном поле, можно после небольших видоизменений применять к течениям в бегущем электромагнитном поле. Основные результаты исследования приведены в гл. VII в виде графиков профилей безразмерной осредненной скорости, распределений токов и корреляций пульсационных скоростей для турбулентного течения в постоянном магнитном поле и охватывают широкий диапазон изменения определяющих параметров. Эти данные служат основой качественного и количественного описания внутренней структуры течения.

Даже для ламинарных магнитогидродинамических течений существует лишь несколько математических решений. Все эти решения получены при условиях, близких к условиям, для которых известны решения задачи о ламинарном течении в обычной гидродинамике. Однако имеющихся решений достаточно для того, чтобы дать по крайней мере качественное описание большинства лами-

нарных магнитогидродинамических течений, представляющих практический интерес; к настоящему времени характер электромеханических взаимодействий в таких течениях хорошо изучен. На этом основании, а также в силу широко распространенного убеждения, что турбулентные потоки непременно связаны с большими потерями энергии, чем ламинарные, можно было бы прийти к выводу, что с практической точки зрения следует избегать турбулентного режима и проектировать все аппараты для ламинарного течения. Однако беглое ознакомление с гидравлическим оборудованием свидетельствует о том, что такое заключение было бы ошибочно. За исключением ламинарного подслоя, всегда присутствующего на твердых поверхностях, ламинарное течение в гидравлических аппаратах реализуется редко; вероятно, единственная технически важная область применения таких течений — вискозиметры и гидродинамические подшипники. Действительно, для тех форм ограничивающих поверхностей, типов жидкости и градиентов давления или расходов, которые используются в большинстве гидравлических аппаратов, ламинарный режим, если бы он мог существовать, давал бы меньшие потери энергии, чем турбулентный. Однако этот факт не имеет почти никакого значения для проектирования, так как характер течения (ламинарный или турбулентный) определяется единственным параметром — числом Рейнольдса, и не может быть выбран независимо от других параметров течения. При проектировании крупных промышленных установок конструкция с ламинарным течением, по-видимому, всегда оказывается более громоздкой, более сложной по конфигурации и (или) дает большие полные потери энергии, чем разумная конструкция с турбулентным течением. Пока нет оснований считать, что этот опыт инженеров-гидравликов будет опровергнут при проектировании магнитогидродинамических аппаратов.

Однако изучение магнитогидродинамической турбулентности интересно также по причинам, совершенно не связанным с проектированием магнитогидродинамических машин. Более ясное понимание турбулентных магнитогидродинамических течений приведет к лучшему пониманию обычной турбулентности и механизма пере-

хода от ламинарного режима течения к турбулентному. Наложение магнитного поля обуславливает появление параметра, изменяя который, можно, по желанию, изменять механизм потерь энергии и распределение потерь по сечению потока. Судя по сообщениям специалистов, в плазме с очень большой плотностью энергии в установках типа «стеллератор» обнаружено явление, напоминающее турбулентность. Такая установка служит примером устройства, где возникновение турбулентности крайне нежелательно, так как оно приводит к быстрому разрушению плазмы. Изложенная в гл. III и принятая в данном исследовании постановка задачи, при которой среда рассматривается как континуум, является слишком грубой для детального описания поведения плазмы в сильных магнитных полях. Однако и в этой постановке, по-видимому, не исключается возможность спонтанного турбулентного взаимодействия флуктуаций скорости и магнитного поля даже в покоящейся жидкости, если магнитное поле и электропроводность достаточно велики.

Было предпринято несколько различных по форме попыток анализа магнитогидродинамической турбулентности. Некоторые работы, в особенности работы Бэтчелора [2] и Чандрасекара [4], имели целью распространить статистическую теорию турбулентности на магнитогидродинамические течения. К сожалению, эта теория еще менее разработана, чем статистическая теория обычной турбулентности, которая до сих пор не может обеспечить удовлетворительное описание используемых в технике течений. Локк [10] пытался, исходя из теории малых возмущений, рассчитать критическое число Рейнольдса, соответствующее переходу от ламинарного режима к турбулентному для магнитогидродинамического течения между параллельными плоскостями при наличии постоянного поперечного магнитного поля. Стюарт [14] провел аналогичные расчеты для течения в продольном магнитном поле. Эти результаты пока не были подтверждены экспериментально; значение критического числа Рейнольдса, полученное Локком, приблизительно в 200 раз превышает значение, полученное экспериментально Мергетройдом [12]. Это большое расхождение связано с тем, что результаты Локка определяют не-

устойчивость ламинарного течения при наличии только бесконечно малых возмущений, в то время как результаты Мергетройда характеризуют подавление турбулентности при весьма больших возмущениях. Значения критических чисел Рейнольдса для этих двух явлений в обычной гидродинамике, а также, вероятно, и в магнитогидродинамических течениях могут различаться во много раз.

Для данного исследования наиболее полезными из предшествующих работ являются две серии экспериментов, одна из которых проведена Гартманом и Лазарусом [7] в 1937 г., а другая — Мергетройдом [12] в 1953 г. В этих экспериментах измерялись градиент давления, расход и величина магнитного поля при течении ртути в каналах прямоугольного сечения при наличии постоянного поперечного магнитного поля. В результатах этих двух серий экспериментов, которые подробно описаны в гл. V, обнаруживаются как соответствия, так и различия, служащие важным источником информации для данной работы. Конечно, уже делались попытки объяснить или связать между собой на некоторой теоретической основе закономерности, отмеченные в этих экспериментах. В теоретических разделах упомянутых работ авторы ограничились установлением эмпирической зависимости перепада давления от расхода, и их результаты основаны на довольно неудовлетворительном применении теории размерностей. Гартман и Лазарус пытались выделить в своих результатах «эффект гашения турбулентности», присущий турбулентным течениям, и «эффект вязкости», подобный обнаруженному в ламинарных течениях. Метод, с помощью которого они проводили такое отделение, содержал некоторые произвольные заключения и был основан на допущении о независимости эффекта гашения турбулентности от проводимости жидкости. Как отмечал впоследствии Мергетройд, это допущение не имеет ни теоретического, ни экспериментального обоснования. Вместо этого Мергетройд предложил схему, основанную на допущении о том, что коэффициент сопротивления f (определяемый в гл. II) в турбулентном магнитогидродинамическом течении не зависит от вязкости жидкости. Это предположение также несостоятельно. Хотя в турбу-

лентных течениях локальная структура центральной области потока стремится стать независимой от вязкости жидкости, коэффициент сопротивления для течений в каналах всегда сильно зависит от вязкости. Если η — вязкость жидкости, то в гидродинамическом и магнитогидродинамическом ламинарных потоках коэффициенты сопротивления пропорциональны соответственно η и $\sqrt{\eta}$, в то время как $1/\sqrt{f}$ для турбулентного гидродинамического течения изменяется линейно по $\lg \eta$.

Как Мергетройд [12], так и Гартман и Лазарус [7] ясно понимали, что теоретические разделы их работ в лучшем случае являются неполными, и указывали, что они ведут дальнейшую работу, которая будет опубликована позднее. Однако эти работы не появились, и явления, обнаруженные в опубликованных экспериментах, остались в значительной степени необъясненными.

Цель данного исследования выходит за рамки только что описанных теоретических изысканий, поскольку мы стремимся получить не только корреляционную схему, которая позволила бы связать обе имеющиеся серии экспериментальных данных, но также использовать эти данные для определения внутренней структуры течения и получения в результате лучшего понимания природы взаимодействий в потоке. Используемый здесь метод основан на гипотезе о тесной связи турбулентных течений при наличии и при отсутствии магнитного поля (аналогичной связи, существующей для соответствующих ламинарных течений) и на предположении о том, что методы, оказавшиеся наиболее плодотворными при исследовании обычных турбулентных течений, могут также успешно применяться при анализе турбулентного магнитогидродинамического течения. Таким образом, мы приходим к идее использования в данной задаче полуэмпирических методов гидромеханики. Эти методы состоят в совместном применении основных уравнений магнитной гидродинамики, а также теории размерностей и имеющихся экспериментальных данных, причем из каждого источника берется вся информация, которая может быть получена простым путем.

Ввиду того, что эти методы и результаты, полученные с их помощью в гидродинамике, неизвестны многим инженерам-электрикам, в гл. II описан основной используемый метод анализа, выведены формулы для профиля скорости, корреляций пульсационных скоростей и коэффициента сопротивления в турбулентных течениях при отсутствии магнитного поля и проведено сравнение теоретических результатов с частью обширных экспериментальных данных, накопленных за прошедшие тридцать лет.

В гл. III мы обращаемся к основным уравнениям магнитной гидродинамики несжимаемой жидкости. В указанной главе рассматриваются три вопроса. В § 1 записаны основные уравнения, выбрана схема приведения к безразмерному виду, выведены некоторые удобные формы безразмерных уравнений. В § 2 и 3 получены граничные условия для течения в постоянном поперечном магнитном поле, а также дана классификация всех существенных параметров течения в соответствии с их четностью или нечетностью; эта классификация оказывается справедливой для течений как в постоянных, так и в переменных магнитных полях. В § 4 получено частное решение, в котором осредненная скорость и осредненное возмущенное магнитное поле выражены через параметры системы и определенные интегралы от двух статистических корреляций. Однако принципиальным результатом этого параграфа является заключение о том, что осредненную безразмерную скорость приближенно можно представить в виде функции только от M , R^* и ξ , где M — число Гартмана для течения в канале, R^* — число Рейнольдса, ξ — безразмерная координата, и что безразмерное возмущенное поле приближенно можно представить в виде произведения R_V на другую функцию от M , R^* и ξ . Здесь R_V — магнитное число Рейнольдса. Специалисты по магнитной гидродинамике охарактеризуют этот результат как приближение, справедливое для течений с малыми магнитными числами Рейнольдса, в которых возмущенные поля пропорциональны R_V , но настолько малы, что слабо влияют на движение жидкости.

В гл. IV мы, используя выводы гл. III совместно с аналитическими методами гл. II, получим упрощение, ко-

торое следует из соображений теории размерностей. При этом в виде допущений вводятся в общей формулировке два эмпирических закона обычного турбулентного течения в каналах: 1) вблизи границ канала профиль осредненной скорости не зависит от высоты канала; 2) вблизи центра канала локальная структура осредненного течения не зависит от вязкости жидкости.

Первое предположение означает, что течение вблизи границы почти не отличается от течения, которое имело бы место при отсутствии остальных стенок (при обтекании полубесконечным потоком); второе предположение означает, что вязкая диссипация в центральной области канала пренебрежимо мала. Оба эти предположения справедливы как для обычных турбулентных течений, так и для ламинарных магнитогидродинамических течений при больших числах Гартмана. Однако окончательное их подтверждение будет зависеть от конечных результатов настоящего исследования. Основными результатами гл. IV являются формулы, выражающие профиль скорости и коэффициент сопротивления через две неизвестные функции. Одна из них зависит от M^2/R^* (этот параметр не содержит коэффициента вязкости жидкости) и характеризует возмущение профиля скорости, обусловленное магнитогидродинамическими эффектами. Другая зависит от M/R^* (этот параметр не содержит высоты канала) и представляет для центральной части канала постоянную добавку к осредненной скорости за счет магнитогидродинамических эффектов.

Теоретический анализ, изложенный в гл. III и IV, позволяет упростить задачу отыскания профиля безразмерной осредненной скорости и перейти от определения одной функции четырех переменных M , R^* , R_V и ξ к определению двух функций, каждая из которых зависит от одной переменной. Для получения дополнительного упрощения мы должны обратиться к экспериментальным данным. Две серии используемых здесь экспериментальных данных подробно описаны в гл. V. Гл. VI посвящена сравнению теории и эксперимента. К счастью, общие свойства этих данных таковы, что они позволяют с достаточными основаниями пренебречь одной из неизвестных функций и обеспечивают эмпирическое определение

другой. Надлежащим образом обработанные результаты всех экспериментов для развитых турбулентных течений хорошо соответствуют простой функции от M^2/R^* , что является экспериментальным подтверждением данной теории. Экспериментальные данные позволяют также найти метод расчета аналитической аппроксимации этой неизвестной функции. Однако предположения, на которых основана эта аппроксимация, не выполняются при малых значениях M и поэтому результаты при средних и больших значениях M^2/R^* расходятся с эмпирической кривой примерно на постоянную величину. Тем не менее эта аппроксимация полезна для проверки внутренней непротиворечивости наших результатов.

При установлении соответствия теории с экспериментальными данными для течений, близких к ламинарным, возникают некоторые трудности, которые подробно обсуждаются в гл. VI. Мы вынуждены допустить, что резкой границы между магнитогидродинамическими ламинарными и турбулентными течениями не существует и что наши упрощающие предположения не всегда соответствуют сложным течениям в переходной области между ламинарным режимом и полностью развитой турбулентностью. Гартман [6] уже давно осуществил анализ ламинарного течения; настоящее исследование, по-видимому, дает удовлетворительную трактовку полностью развитых турбулентных течений. Однако все еще остается небольшая переходная область, в которой оба исследования неприменимы. Это не удивительно, поскольку такое же положение существует при исследовании более простых течений при отсутствии магнитного поля.

После определения всех неизвестных функций можно легко рассчитать профиль осредненной скорости, приближенные распределения токов и корреляции пульсационных скоростей, и при желании, с помощью формул гл. III и IV вычислить осредненные возмущенные поля. В гл. VII представлены результаты этих расчетов, а также обсуждаются некоторые интересные закономерности, существующие при высоких значениях M^2/R^* . Эти результаты являются основными в данном исследовании.

Главы VIII и IX представляют собой краткое обсуждение ламинарного и турбулентного течений в бегущем

электромагнитном поле. Они содержат главным образом анализ уравнений магнитной гидродинамики, приведенных в гл. III. Основной качественный вывод этих глав состоит в том, что при надлежащих условиях работы канала распределения скорости и электромагнитного поля для течений в бегущем магнитном поле будут аналогичны распределениям тех же величин для соответствующих течений в постоянных полях. Под «надлежащими условиями работы» понимаются такие, при которых частоты скольжения в системе координат, движущейся вместе с жидкостью, достаточно низки, чтобы можно было пренебречь скин-эффектом, но еще достаточно велики, чтобы гармонические компоненты сил, действующих на жидкость, эффективно сглаживались инерцией жидкости. Если эти условия выполняются, поперечное магнитное поле постоянно по сечению канала, а распределение приложенных к жидкости эффективных сил аналогично распределению сил для соответствующих течений в постоянном магнитном поле. Тогда изменения механических величин, таких, как осредненная скорость и напряжение трения на стенке, для течения в бегущем электромагнитном поле подобны изменениям тех же величин для соответствующего течения в постоянном магнитном поле, а изменения электромагнитных величин, таких, как магнитное поле, напряженность электрического поля и плотность тока, отличаются от изменений, соответствующих течению в постоянном магнитном поле, главным образом наложенной модуляцией в виде бегущей волны.

Для течений в бегущем электромагнитном поле магнитное число Рейнольдса всегда является весьма важным параметром; работа любой машины индукционного типа зависит от взаимодействия полей, связанных с электрическим возбуждением, и реактивных полей, связанных с токами в движущемся веществе. Последние, конечно, аналогичны возмущенным полям при течении в постоянном магнитном поле, за исключением того, что они не могут быть малыми, если в потоке происходит существенное преобразование энергии. Хотя влияние магнитного числа Рейнольдса часто бывает сильным, этот эффект довольно прост; в нашем анализе он выра-

жается в изменении полного поперечного магнитного поля и, следовательно, эффективного числа Гартмана течения при изменении среднего скольжения и отношения реактивного сопротивления канала к его активному сопротивлению.

Анализ, излагаемый в гл. VIII, в общем строится по схеме, намеченной Блэйком в работе [3] по проектированию индукционных насосов, за исключением того, что в нем более полно рассмотрены механические свойства течения. Последний параграф указанной главы представляет собой отступление от главной темы; в нем приводятся некоторые известные аналогии между действием индукционных насосов и обычных индукционных двигателей, имеющие отношение к настоящему исследованию.

Глава IX по содержанию подобна гл. III. В ней показано, что уравнение, определяющее профиль осредненной скорости для течения в бегущем электромагнитном поле, по форме почти идентично соответствующему уравнению для течения в постоянном магнитном поле. Из этого результата, естественно, вытекает, что кривые для течений в постоянном поле, представленные в гл. VII, можно после незначительных видоизменений применять к турбулентному течению в бегущем магнитном поле.

Глава X содержит краткие выводы и некоторые предложения, касающиеся дальнейшей работы.

Глава II

ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛАХ ПРИ ОТСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

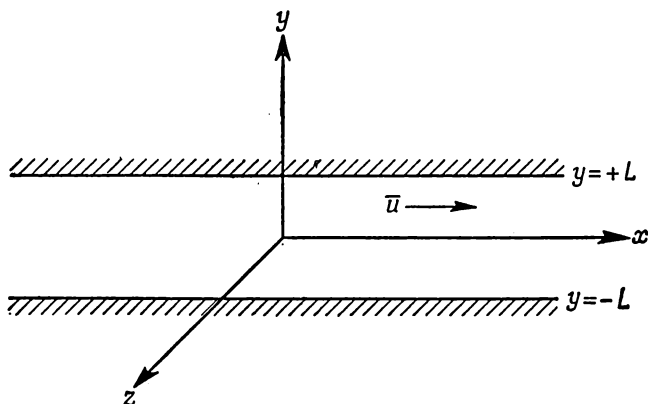
§ 1. Полуэмпирический анализ

Наиболее эффективный метод анализа турбулентного течения в каналах при отсутствии магнитного поля основан на двух эмпирических законах и теории размерностей. Главный результат этого анализа — установление вида функциональных зависимостей (содержащих две неизвестные постоянные) коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса и осредненной по времени скорости от расстояния до стенки канала и числа Рейнольдса. Согласно экспериментам, проведенным Никурадзе [13], Лауфером [9] и другими исследователями, зависимость для коэффициента сопротивления является весьма точной при изменении числа Рейнольдса более чем на три порядка. Предсказанное распределение скорости не удовлетворяет ни граничному условию обращения в нуль скорости на стенке, ни условию симметрии (обращение в нуль градиента скорости в центре канала); однако для точек, не слишком близких к границе или центру, оно также хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Известны два исследования, выполненные этим методом: одно относится к течению в каналах с идеально гладкими стенками, а другое — к течению в каналах с шероховатыми стенками. Эти исследования, проведенные Миллиkenом [11] в 1939 г., соответствуют предельным случаям практически осуществимых течений. Мы ограничимся рассмотрением каналов с гладкими стенками. В этой главе излагаются результаты Милликена, относящиеся к течению жидкости в гладких каналах; в дальнейшем мы применим приведенное здесь рассуждение

к исследованию проблемы магнитогидродинамической турбулентности в гладких каналах.

Рассмотрим течение жидкости в направлении оси x между двумя гладкими плоскостями $y = \pm L$, расстояние



Фиг. 1. Геометрия обычного гидродинамического течения между двумя параллельными плоскостями.

между которыми $2L$ (фиг. 1). Примем следующие обозначения:

- ρ — плотность жидкости;
- η — вязкость жидкости;
- L — полуширина канала;
- \bar{u} — осредненная (по времени) скорость;
- \bar{U} — максимальная (по сечению) величина осредненной скорости;
- \bar{V} — среднее (по сечению) значение осредненной скорости;
- τ_0 — напряжение трения на стенке.

Предполагается, что осредненная скорость \bar{u} изменяется только в направлении y . В таком случае осредненный градиент давления $\nabla \bar{p}$ имеет лишь x -компоненту, которая является постоянной величиной. Для установившегося течения градиент давления $\partial \bar{p} / \partial x$ и наприя-

жение трения на стенке τ_0 связаны соотношением

$$A \left| \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right| = S \tau_0, \quad (2.1)$$

где S и A — периметр и площадь поперечного сечения канала соответственно.

Величина

$$D_H = \frac{4A}{S} \quad (2.2)$$

называется гидравлическим диаметром канала. Для круглой трубы гидравлический диаметр равен ее диаметру. Для течения между параллельными плоскостями $D_H = 4L$. Соотношение (2.1) можно записать в виде

$$\left| \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right| = \frac{4\tau_0}{D_H}. \quad (2.3)$$

Физическая картина течения определяется двумя существенными для рассматриваемой задачи параметрами жидкости ρ и η , характерной длиной канала L и напряжением трения на стенке τ_0 . Поскольку \bar{u} изменяется с расстоянием от оси канала, справедлива формула

$$\bar{u} = f_1(\rho, \eta, L, \tau_0, y), \quad (2.4)$$

где правая часть является произвольной функцией пяти аргументов. Определим динамическую скорость \bar{u}^* и число Рейнольдса, рассчитанное по динамической скорости, соотношениями

$$\bar{u}^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (2.5)$$

и

$$R^* = \frac{\rho \bar{u}^* L}{\eta}, \quad (2.6)$$

а безразмерное расстояние от стенки ξ — соотношением

$$\xi = \frac{L - y}{L}. \quad (2.7)$$

Используя π -теорему теории размерностей, из соотношения (2.4) получаем

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = f_2(R^*, \xi), \quad (2.8)$$

где f_2 представляет собой другую произвольную функцию двух аргументов.

Физическая картина течения не определяет единственным образом представление функции \bar{u} в виде (2.4), а следовательно, и в виде (2.8). Например, в выражении (2.4) переменную τ_0 можно с достаточным основанием заменить величинами \bar{U} , \bar{V} или $\partial \bar{p} / \partial x$. Эту частную формулировку Милликен выбрал, руководствуясь главным образом результатами многочисленных экспериментальных и теоретических работ, которые проводились примерно в течение пятнадцати лет Прандтлем, Карманом, Фричем, Никурадзе и их сотрудниками в Геттингене и Аахене [1]. Достоинство этой формулировки заключается в простоте конечных результатов и немногочисленности необходимых предположений. Однако сходные результаты были получены ранее Прандтлем и Карманом из соображений, основанных на теории пути смещения, которая постулирует определенный механизм турбулентности, аналогичный механизму молекулярного переноса количества движения.

Первая из использованных Милликеном эмпирических зависимостей известна как соотношение Прандтля для распределения скорости вблизи стенки. Согласно этому соотношению, выражение (2.8) сводится вблизи стенки канала к виду

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = X(R^* \xi); \quad (2.9)$$

т. е. профиль осредненной скорости становится независимым от размера канала L . Выражение (2.9), конечно, справедливо и в ламинарном подслое, непосредственно примыкающем к стенке, в котором скорость \bar{u} изменяется примерно линейно с наклоном

$$\frac{d\bar{u}}{d\xi} = \frac{L}{\eta} \tau_0.$$

В таком случае из (2.5) и (2.6) следует

$$\left[\frac{d(\bar{u}/\bar{u}^*)}{d\xi} \right]_{\text{ст.}} = R^*. \quad (2.9a)$$

Однако важность соотношения (2.9) для настоящего анализа заключается в том, что оно применимо за пределами ламинарного подслоя во внешней части турбулентного ядра.

Другой необходимой эмпирической зависимостью является соотношение Кармана для дефекта скорости. Оно состоит в том, что для точек, не слишком близких к стенке, разность между максимальным значением осредненной скорости \bar{U} и скоростью \bar{u} в рассматриваемой точке (дефект скорости) можно представить в виде

$$\frac{\bar{U} - \bar{u}}{\bar{u}^*} = \Psi(\xi). \quad (2.10)$$

Таким образом, локальная структура турбулентного ядра не зависит от вязкости жидкости. В отличие от выражений (2.8) и (2.9), справедливых лишь в случае, когда стенки гладкие, соотношение (2.10) справедливо вне зависимости от шероховатости стенок канала и, таким образом, имеет до некоторой степени универсальный характер.

Тот факт, что структура ядра потока не зависит от вязкости жидкости, кажется вначале весьма странным и требует некоторого объяснения.

Можно предполагать следующее.

1. Поскольку вся энергия, затрачиваемая на создание течения в канале, переходит в тепло вследствие вязкой диссипации, коэффициент вязкости, который описывает механизм диссипации, должен быть важным параметром, определяющим структуру потока.

2. При уменьшении вязкости структура потока должна приближаться к структуре потока идеальной жидкости.

Второе предположение может быть опущено почти тотчас же, так как оно не подтверждается ни математической теорией, ни физическим экспериментом. Условие $\eta = 0$ понижает порядок уравнений Навье — Стокса, со

второго до первого и, таким образом, изменяет характер допустимых граничных условий на твердых поверхностях. Так как уравнения нелинейны, этот эффект может обуславливать существенное изменение класса допустимых решений при изменении коэффициента вязкости жидкости от нуля до некоторого малого, но отличного от нуля значения; изменение решений при изменении коэффициентов уравнения Навье — Стокса может и не быть непрерывным. В технических приложениях мы фактически сталкиваемся с турбулентными течениями несжимаемых жидкостей, которые по своим свойствам могут занимать любое промежуточное место между легкими маслами и воздухом. Коэффициенты вязкости последних веществ различаются приблизительно на четыре порядка. Опыт показал, что параметром среды, определяющим характер течения (ламинарный или турбулентный), является не вязкость, а отношение вязкости к плотности (кинематическая вязкость).

Между первым предположением и соотношением (2.10) никаких явных противоречий не имеется. Для того чтобы результат, выражаемый соотношением (2.10), не противоречил здравому смыслу, интенсивность диссипации энергии должна быть переменной по сечению канала. Аналогичное явление имеет место даже в простых ламинарных течениях, где (для течения между двумя плоскостями) интенсивность диссипации в единице объема пропорциональна скорости жидкости. При этом интенсивность диссипации меняется по сечению канала по параболическому закону, достигая максимума в центре и обращаясь в нуль на стенке. В турбулентном потоке распределение диссипации совершенно иное. Грубый расчет, относящийся лишь к осредненному течению, показывает, что в турбулентном потоке средняя часть канала, составляющая половину его объема, может дать менее 5% полной диссипации энергии, тогда как 10% объема канала вблизи стенок могут обуславливать примерно 80% диссипации. Результаты измерений Лауфера [9], по крайней мере качественно, согласуются с этим представлением. Таким образом, уравнение (2.10) справедливо вследствие того, что оно относится к области, в которой потери энергии весьма малы.

Соотношения (2.8) и (2.10) дают для \bar{u}/\bar{u}^* выражение, отличающееся от (2.9). Так как \bar{U} есть осредненная скорость в центре канала, т. е. при $\xi = 1$, из (2.8) получаем

$$\frac{\bar{U}}{\bar{u}^*} = f_2(R^*, 1) \equiv \Phi(R^*),$$

и соотношение (2.10) принимает вид

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}^*} = \Phi(R^*) - \Psi(\xi). \quad (2.11)$$

Исходя из того, что соотношения (2.9) и (2.11) могут не противоречить друг другу, попробуем определить три неизвестные функции X , Φ , Ψ , предпочитая существование в периферийной части канала области, в которой справедливы оба эти соотношения. Тогда в этой области

$$X(R^*\xi) = \Phi(R^*) - \Psi(\xi).$$

Очевидно, необходимо использовать логарифмические функции. Единственным решением, удовлетворяющим условию $\Psi(1) = 0$, как этого требует соотношение (2.10), является

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}^*} = X(R^*\xi) = A \ln(R^*\xi) + C, \quad (2.12)$$

$$\frac{\bar{U}}{\bar{u}^*} = \Phi(R^*) = A \ln R^* + C, \quad (2.13)$$

$$\frac{\bar{U} - \bar{u}}{\bar{u}^*} = \Psi(\xi) = -A \ln \xi, \quad (2.14)$$

где A и C — неизвестные постоянные, которые могут быть найдены из эксперимента.

§ 2. Сравнение с экспериментом

Экспериментальные данные различных авторов подтверждают, что соотношение (2.12) точно описывает профиль осредненной скорости от точки $R^*\xi \approx 30$ почти до центра канала. Вблизи центра канала уравнение (2.12) дает значения скорости, завышенные на несколько процентов, тогда как действительный профиль скорости выравнивается и в соответствии с условием симметрии

производная в центре канала обращается в нуль, а не равняется A , как это следует из соотношения (2.12). Непосредственно вблизи стенки, где $R^*\xi \leq 5$, экспериментальные точки, как и следовало ожидать, лежат на прямой

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = R^*\xi. \quad (2.15)$$

Вблизи стенки скорость стремится к нулю, а не к $-\infty$, как дает соотношение (2.12). В промежуточной области $5 < R^*\xi < 30$ происходит плавный переход между кривыми, описываемыми соотношениями (2.12) и (2.15). Значения постоянных A и C , определенные разными авторами, различаются на 10—20%. Последние измерения Лауфера приводят к формуле

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = 6,9 \lg(R^*\xi) + 5,5,$$

тогда как в более ранних экспериментах Никурадзе была получена зависимость

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = 5,75 \lg(R^*\xi) + 5,5.$$

Для сравнительно простых течений, таких, как течения в трубах или между двумя плоскостями, уравнения Навье—Стокса можно осреднить по времени и затем проинтегрировать; в результате получим зависимость между осредненной скоростью \bar{u} и осредненным по времени произведением $\overline{u'_x u'_y}$ составляющих пульсационной скорости u'_x и u'_y по осям x и y соответственно. Для течения между двумя плоскостями получаем

$$\rho \overline{u'_x u'_y} - \eta \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{y}{L} \tau_0, \quad (2.16)$$

или, в безразмерном виде,

$$\frac{\overline{u'_x u'_y}}{u^{*2}} = 1 - \xi - \frac{1}{R^*} \frac{d(\bar{u}/u^*)}{d\xi}. \quad (2.17)$$

Используя соотношение (2.12), получаем

$$\frac{\overline{u'_x u'_y}}{\bar{u}^{*2}} = 1 - \xi - \frac{A}{R^* \xi}. \quad (2.18)$$

Таким образом, зная профиль осредненной скорости, можно определить величину $\overline{u'_x u'_y}$. Так как при выводе уравнения (2.18) используется соотношение (2.12), выражение (2.18) может быть верным только в тех областях течения, где справедливо (2.12). В частности, получаемое из уравнения (2.18) значение $\overline{u'_x u'_y} / \bar{u}^{*2}$ в центре канала является неверным. Из простых соображений симметрии следует, что левая часть уравнения (2.18) должна быть нечетной функцией y (но не ξ) и поэтому должна обращаться в нуль при $\xi = 1$. Однако поскольку $A \approx 3$ и для большинства турбулентных течений $R^* > 100$, ошибка получается не очень существенной. Величина $\overline{u'_x u'_y}$, согласно уравнению (2.18), в большей части канала изменяется почти линейно (и поэтому не зависит от вязкости жидкости); при $R^* \xi = \sqrt{AR^*}$ она достигает максимума и быстро уменьшается при дальнейшем уменьшении ξ . Измерения Лауфера [9] показали, что это уравнение является весьма точным всюду, за исключением точек, расположенных в непосредственной близости от стенки.

Измерения Лауфера дают дополнительные сведения о турбулентных пульсациях скорости. Вблизи центра канала среднеквадратичные значения составляющих пульсационной скорости u'_x , u'_y и u'_z приблизительно равны 0,02—0,04 \bar{U} . Здесь $\sqrt{\overline{(u'_y)^2}} \approx \sqrt{\overline{(u'_z)^2}}$, а $\sqrt{\overline{(u'_x)^2}}$ несколько превосходит каждую из этих величин. В центральной области безразмерные величины, как, например, $\sqrt{\overline{(u'_x)^2}} / \bar{u}^*$, не зависят от числа Рейнольдса. Составляющие пульсации по осям y и z медленно нарастают по направлению к стенке до значений, примерно вдвое превышающих их значения в центре, а затем вблизи стенки спадают до нуля. Составляющая пульсации по оси x также нарастает, сначала медленно, а затем в периферий-

ной части ядра быстрее, достигая значения $0,10\bar{U}$ в переходной зоне, и спадает до нуля в ламинарном подслое.

Полученную таким образом полную картину течения можно разбить на три части. В центральном ядре, которое может занимать 90% объема канала, осредненная скорость меняется медленно, пульсации скорости составляют лишь несколько процентов от осредненной скорости и влиянием диссипации практически можно пренебречь. Вблизи стенки имеется очень тонкий ламинарный подслои, в котором влияние диссипации невелико; средняя скорость линейно возрастает с расстоянием от стенки, а пульсации малы или отсутствуют. Эта область обычно занимает менее 1% объема канала. Между двумя указанными областями находится переходная зона, являющаяся зоной повышенной активности происходящих в потоке процессов. В этой зоне пульсации скорости соизмеримы с осредненными скоростями; здесь диссипируется основная часть энергии, затрачиваемой на движение жидкости.

§ 3. Коэффициент сопротивления

Для многих инженеров знание структуры потока в канале менее важно, чем умение рассчитать с достаточной для целей проектирования точностью зависимость между расходом жидкости и перепадом давления. Точные расчеты особенно важны при проектировании больших распределительных систем (газовые и нефтяные трубопроводы, городской водопровод), в которых практически вся вкладываемая мощность расходуется на гидравлические потери. Инженеры-гидравлики обычно используют коэффициент сопротивления f , определяемый выражением

$$f = \frac{8\tau_0}{\rho \bar{V}^2}. \quad (2.19)$$

Тогда из (2.3) для осредненного градиента давления получим

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{f}{D_H} \frac{\rho \bar{V}^2}{2}; \quad (2.20)$$

\bar{V} можно определить, если известен расход. Таким образом, если известно f , можно определить осредненный градиент давления. Коэффициент сопротивления можно получить из предыдущих результатов. Сравнивая соотношения (2.5) и (2.19), будем иметь

$$f = \frac{8\bar{u}^{*2}}{\bar{V}^2}$$

или

$$\frac{\bar{V}}{\bar{u}^*} = \sqrt{\frac{8}{f}}. \quad (2.21)$$

Как было показано выше, соотношение Кармана для дефекта скорости справедливо для всего сечения канала, за исключением малой области вблизи стенок, где осредненные скорости малы. Таким образом, интегрирование выражения (2.10) по ξ от 0 до 1 дает приближенное соотношение между максимальной и средней по сечению скоростями жидкости:

$$\frac{\bar{U} - \bar{V}}{\bar{u}^*} = \int_0^1 \Psi(\xi) d\xi,$$

которое с использованием (2.13) и (2.14) принимает вид

$$\frac{\bar{V}}{\bar{u}^*} = A \ln R^* + C - A$$

или

$$\sqrt{\frac{8}{f}} = A \ln R^* + C - A. \quad (2.22)$$

В соотношении (2.22) параметр R^* можно заменить обычным числом Рейнольдса R_{DH} , рассчитываемым по гидравлическому диаметру и средней по сечению скорости \bar{V}

$$R_{DH} = \frac{\rho \bar{V} D_H}{\eta},$$

и получить следующее соотношение:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = C_1 \lg(R_{DH} \sqrt{f}) + C_2, \quad (2.23)$$

где C_1 и C_2 — новые постоянные, связанные с предыдущими постоянными A и C . Это соотношение подтверждено экспериментально для различных жидких сред (воздух, вода, ртуть) и каналов различной формы. Было установлено, что постоянные C_1 и C_2 практически не зависят от формы поперечного сечения канала. Полученные экспериментально значения C_1 лежат в интервале 2,0—2,4, а $C_2 \approx -0,8$. Эти результаты относятся, конечно, к каналам с очень гладкими стенками. В практических расчетах в большинстве случаев необходимо учитывать шероховатость стенок канала; такие расчеты будут основываться на иных соотношениях.

Глава III

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТУРБУЛЕНТНОГО МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 1. Основные уравнения

Движение электропроводной неполяризуемой несжимаемой ньютоновской жидкости можно описать математически следующей системой уравнений:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (3.1б)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.1в)$$

$$\mathbf{J} = \sigma [\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}], \quad (3.1г)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.1д)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (3.1e)$$

где

∇ — дифференциальный векторный оператор, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$;

\mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля;

\mathbf{B} — вектор магнитной индукции;

\mathbf{J} — вектор плотности тока;

μ_0 — магнитная проницаемость вакуума;

ρ — плотность среды;

\mathbf{u} — вектор скорости жидкости;

p — давление;

η — динамическая вязкость;

σ — электропроводность.

В этих уравнениях пренебрегается токами смещения, конвекционными токами и силами, появляющимися при наличии свободных зарядов. В системе (3.1) отсутствует

уравнение Гаусса, которое необходимо лишь для определения плотности электрического заряда и поэтому не представляет интереса для нашей задачи.

Для удобства дальнейшего изложения приведем систему (3.1) к безразмерному виду. Анализ этих уравнений показывает, что лишь три нормирующих параметра могут быть выбраны произвольно; пусть это будут характерная скорость U_0 , характерная длина L_0 и характерное магнитное поле B_0 . Определим безразмерные переменные и операторы следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{u}{U_0}, \quad E = \frac{E}{U_0 B_0}, \quad B = \frac{B}{B_0}, \\ J &= \frac{J}{\sigma U_0 B_0}, \quad \wp = \frac{p}{\rho U_0^2}, \quad \tau = \frac{t U_0}{L_0}; \quad D = L_0 \nabla. \end{aligned}$$

Тогда система (3.1) примет вид

$$D \times E = - \frac{\partial B}{\partial \tau}, \quad (3.2a)$$

$$D \times B = R_V J, \quad (3.2b)$$

$$D \cdot B = 0, \quad (3.2b)$$

$$J = E + U \times B, \quad (3.2r)$$

$$D \cdot U = 0, \quad (3.2d)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + (U \cdot D) U = - D \wp + \frac{D^2 U}{R_e} + R_H R_V (J \times B), \quad (3.2e)$$

где R_e — обычное гидродинамическое число Рейнольдса, R_V — магнитное число Рейнольдса и R_H — отношение плотностей магнитной и кинетической энергии:

$$R_e = \frac{\rho U_0 L_0}{\eta}, \quad (3.3)$$

$$R_V = \mu_0 \sigma L_0 U_0, \quad (3.4)$$

$$R_H = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho U_0^2}. \quad (3.5)$$

Подстановка уравнения (3.2b) в (3.2e) дает

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + (U \cdot D) U = - D \wp + \frac{D^2 U}{R_e} + R_H (D \times B) \times B. \quad (3.6)$$

Подстановка уравнений (3.2а) и (3.2б) в уравнение, получающееся в результате взятия ротора от обеих частей (3.2г), дает

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} = \mathbf{D} \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \frac{D^2 \mathbf{B}}{R_V}. \quad (3.7)$$

Используя представление векторных функций в виде диад, уравнения (3.6) и (3.7) можно записать более компактно в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \mathbf{D} \cdot [\mathbf{U}\mathbf{U} - R_H \mathbf{B}\mathbf{B}] = -\mathbf{D} \left(\wp + R_H \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right) + \frac{D^2 \mathbf{U}}{R_e} \quad (3.8)$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} + \mathbf{D} \cdot [\mathbf{U}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{U}] = \frac{D^2 \mathbf{B}}{R_V}. \quad (3.9)$$

Такая запись удобна при расчетах течений в каналах. Из уравнений (3.2в), (3.2д), (3.8) и (3.9) получается решение для \mathbf{U} и \mathbf{B} ; остальные неизвестные функции можно определить непосредственно из уравнений (3.2б) и (3.2г).

§ 2. Граничные условия

Геометрия турбулентного магнитогидродинамического потока между двумя плоскостями $y = \pm L$ в присутствии магнитного поля B_A представлена на фиг. 2. Осредненное течение происходит в направлении оси x . Граничные плоскости $y = \pm L$ считаются совершенными изоляторами, а граничные плоскости $z = \pm \infty$ — идеальными проводниками. Эти положения составляют идеализацию условий, часто встречающихся в практических схемах.

Давление и каждую компоненту векторов скорости и магнитного поля можно представить в виде суммы осредненной по времени величины (обозначается чертой сверху) и пульсации (обозначается штрихом). Таким образом,

$$\begin{aligned} (\mathbf{U})_i &= \overline{u}_i + u'_i, \\ (\mathbf{B})_i &= \overline{B}_i + B'_i, \\ \wp &= \overline{\wp} + \wp', \end{aligned} \quad (3.10)$$

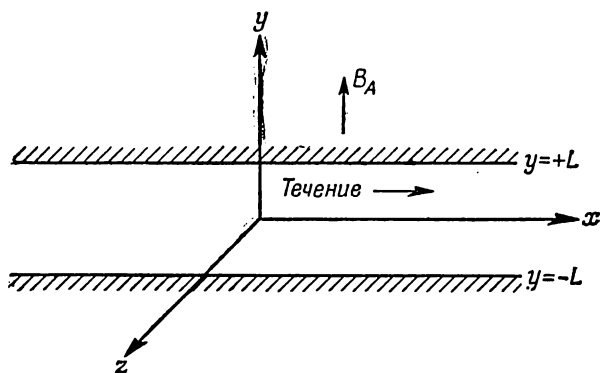
где

$$\overline{u}'_i = \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial \tau} = 0; \quad (3.11)$$

подобные соотношения справедливы также для давления и компонент вектора магнитного поля. Симметрия геометрической картины позволяет принять

$$\overline{u}_y = \overline{u}_z = \overline{\mathcal{B}}_z = 0 \quad (3.12)$$

для всего потока. Кроме того, можно утверждать, что, за исключением давления, все осредненные по времени



Фиг. 2. Геометрия магнитогидродинамического течения между двумя параллельными плоскостями.

величины, в том числе произведения пульсаций, являются функциями только y . Это предположение означает, что при переносе осей в направлении x или z статистические характеристики потока не изменяются.

Граничные условия для компонент скорости особенно просты. Так как предполагается, что вязкость жидкости отлична от нуля, все компоненты скорости должны тождественно обращаться в нуль на границах;

$$\overline{u}_i = u'_i = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm L. \quad (3.13)$$

Граничные условия для магнитного поля не являются очевидными. Однако вне канала ротор и дивергенция

магнитного поля должны тождественно равняться нулю. Осреднение уравнений (3.2б) и (3.2в) сразу показывает, что это условие должно выполняться по отдельности как для осредненных, так и для пульсационных компонент магнитного поля. Поэтому осредненные компоненты $\overline{\mathcal{B}}_x$ и $\overline{\mathcal{B}}_y$ должны быть постоянными вне канала. Ограничение, по которому суммарный ток через канал равен нулю (соответствующее на практике режиму работы демпфера или расходомера), обеспечивает равенство осредненных полей выше и ниже канала. Предполагая далее, что среднее значение магнитного поля при больших y приближается к значению приложенного поля, мы можем выбрать нормирующий параметр $B_0 = B_A$ и положить

$$\left. \begin{array}{l} \overline{\mathcal{B}}_x = 0 \\ \overline{\mathcal{B}}_y = 1 \end{array} \right\} \text{ для } |y| \geq L. \quad (3.14)$$

Кроме того, необходимы граничные условия для корреляций компонент пульсационного магнитного поля. Обращение в нуль ротора и дивергенции пульсационного поля вне канала приводит, в частности, к уравнению

$$(D \cdot B') B' + (D \times B') \times B' = 0 \quad \text{для } |y| \geq L$$

или к эквивалентному уравнению

$$D \cdot (B' B') - D \frac{(B')^2}{2} = 0 \quad \text{для } |y| \geq L. \quad (3.15)$$

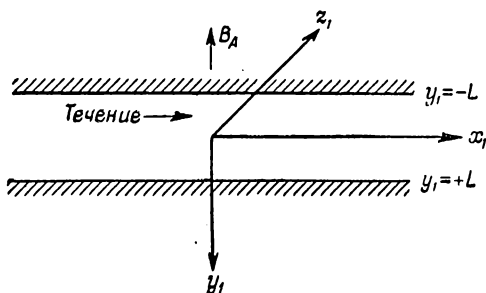
Осреднение уравнения (3.15) с учетом того, что величина пульсационного магнитного поля обращается в нуль при достаточно больших y , дает три условия

$$\left. \begin{array}{l} \overline{\mathcal{B}'_x \mathcal{B}'_y} = 0, \\ \overline{\mathcal{B}'_y{}^2} - \overline{\mathcal{B}'_x{}^2} - \overline{\mathcal{B}'_z{}^2} = 0, \\ \overline{\mathcal{B}'_y \mathcal{B}'_z} = 0 \end{array} \right\} \text{ для } |y| \geq L. \quad (3.16)$$

§ 3. Свойства симметрии

Некоторую дополнительную информацию можно легко получить из свойств симметрии системы, изображенной на фиг. 2. Пусть $A_x(x, y, z, B_A)$, $A_y(x, y, z, B_A)$ и

$A_z(x, y, z, B_A)$ обозначают компоненты одного из осредненных физических векторов (\bar{u} , \bar{E} , \bar{B} , \bar{J} или ∇p), входящих в нашу задачу, которые измерены наблюдателем, связанным с системой координат x, y, z (см. фиг. 2). Пусть $A_{x1}(x_1, y_1, z_1, B_A)$, $A_{y1}(x_1, y_1, z_1, B_A)$ и $A_{z1}(x_1, y_1, z_1, B_A)$ являются компонентами тех же векторов в системе координат x_1, y_1, z_1 (фиг. 3) для того же



Фиг. 3. Повернутая система координат, в которой проводятся наблюдения магнитогидродинамического течения.

или другого статистически эквивалентного потока. Так как изменилась только система координат, в которой производятся измерения, должны выполняться равенства:

$$\begin{aligned} A_{x1}(x_1, y_1, z_1, B_A) &= A_x(x, -y, -z, B_A), \\ A_{y1}(x_1, y_1, z_1, B_A) &= -A_y(x, -y, -z, B_A), \\ A_{z1}(x_1, y_1, z_1, B_A) &= -A_z(x, -y, -z, B_A). \end{aligned}$$

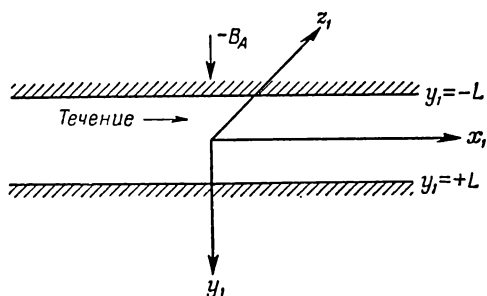
Проведем теперь второй мысленный эксперимент, в котором наблюдатель связан с системой координат x_1, y_1, z_1 , а B_A имеет обратное направление (фиг. 4). Результаты этого эксперимента должны быть идентичны результатам, полученным наблюдателем в системе x, y, z (см. фиг. 2):

$$\begin{aligned} A_{x1}(x_1, y_1, z_1, -B_A) &= A_x(x, y, z, B_A), \\ A_{y1}(x_1, y_1, z_1, -B_A) &= A_y(x, y, z, B_A), \\ A_{z1}(x_1, y_1, z_1, -B_A) &= A_z(x, y, z, B_A). \end{aligned}$$

Из этих двух систем равенств следует:

$$\begin{aligned} A_x(x, -y, -z, B_A) &= A_x(x, y, z, -B_A), \\ -A_y(x, -y, -z, B_A) &= A_y(x, y, z, -B_A), \\ -A_z(x, -y, -z, B_A) &= A_z(x, y, z, -B_A). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Уравнения (3.2)—(3.5) показывают, что изменение знака характерного магнитного поля B_0 не влияет на дифференциальные уравнения для безразмерных переменных.



Фиг 4. Магнитогидродинамическое течение с повернутой системой координат и с измененным на обратное направлением магнитного поля.

Аналогично, из обсуждения граничных условий (см. § 2) следует, что граничные условия для этих переменных также не меняются, если в качестве характерного магнитного поля принять $B_0 = B_A$. Вследствие этого такие переменные, как

$$\frac{\bar{u}}{U_0}, \quad \frac{\bar{E}}{U_0 B_0}, \quad \frac{\bar{J}}{\sigma U_0 B_0}, \quad \frac{\bar{B}}{B_0}, \quad \frac{\bar{p}}{\rho U_0^2},$$

не изменяются при перемене направления B_A ; перемена направления приложенного магнитного поля не влияет на механические переменные \bar{u} и $\bar{\nabla p}$, но приводит к изменению знака электрических переменных \bar{B} , \bar{E} и \bar{J} . Применение этого результата к системе (3.17) дает в част-

ных случаях:

$$\bar{u}_x(x, y, z, B_0) = \bar{u}_x(x, -y, -z, B_0);$$

то же для $(\nabla \bar{p})_x$;

$$\bar{u}_y(x, y, z, B_0) = -\bar{u}_y(x, -y, -z, B_0);$$

то же для $(\nabla \bar{p})_y, (\nabla \bar{p})_z, \bar{u}_z$;

$$\bar{B}_x(x, y, z, B_0) = -\bar{B}_x(x, -y, -z, B_0);$$

то же для \bar{E}_x, \bar{J}_x ;

$$\bar{B}_y(x, y, z, B_0) = \bar{B}_y(x, -y, -z, B_0);$$

то же для $\bar{E}_y, \bar{J}_y, \bar{E}_z, \bar{J}_z, \bar{B}_z$.

Таким образом, переменные легко классифицируются на четные и нечетные функции y . Предыдущие соображения применимы не только к осредненным по времени величинам рассмотренных переменных, но также и к

Таблица 1

Классификация некоторых переменных для
магнитогидродинамического течения в канале
по их пространственной симметрии

Четные функции y	Нечетные функции y
\bar{u}_x	\bar{B}_x
\bar{E}_z	$\overline{u'_x u'_y}$
\bar{J}_z	$\overline{B'_x B'_y}$
\bar{B}_y	$\partial \bar{p} / \partial y$
$\partial \bar{p} / \partial x$	$\overline{B'_z u'_y}$
$\overline{u'^2_x}, \overline{u'^2_y}, \overline{u'^2_z}$	$\overline{B'_y u'_z}$
$\overline{B'^2_x}, \overline{B'^2_y}, \overline{B'^2_z}$	
$\overline{u'_y u'_z}$	
$\overline{B'_y B'_z}$	

осредненным компонентам сложных тензоров. Чтобы определить, является ли осредненное произведение, например $u_x B_y$, четной или нечетной функцией y , припишем произведению по одному индексу на каждый элемент, представляющий y - или z -компоненту вектора, и, кроме того, по индексу на каждый элемент, безразмерная форма которого содержит B_0 . Среднее значение произведения является четной или нечетной функцией y в зависимости от того, четна или нечетна сумма указанных выше индексов. В табл. 1 приведена полученная таким способом классификация некоторых функций.

§ 4. Частное решение

Граничные условия и свойства симметрии потока дают всю информацию, которую можно получить без детального анализа основных уравнений. Следующий шаг состоит в том, чтобы попытаться определить распределения осредненных скоростей, магнитного поля и токов с помощью уравнений (3.8) и (3.9) или эквивалентных им уравнений.

Выберем теперь в качестве характерной длины L_0 полуширину канала L и введем следующие безразмерные координаты: $x = x/L$, $y = y/L$, $z = z/L$. Тогда осреднение по времени уравнения (3.2д) дает $d\overline{\mathcal{B}}_y/dy = 0$, откуда с использованием (3.14) получаем

$$\overline{\mathcal{B}}_y = 1. \quad (3.18)$$

Осреднение по времени уравнений (3.8) и (3.9) дает пять важных уравнений для скалярных величин:

$$\frac{1}{R_e} \frac{d^2 \overline{u}_x}{dy^2} + R_H \frac{d\overline{\mathcal{B}}_x}{dy} - \frac{d}{dy} [\overline{u'_x u'_y} - R_H \overline{\mathcal{B}'_x \mathcal{B}'_y}] = \frac{\partial \overline{p}}{\partial x}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \frac{d}{dy} \left[\overline{u_y^2} + \frac{R_H}{2} (\overline{\mathcal{B}_x^2} + \overline{\mathcal{B}_y^2} + \overline{\mathcal{B}_z^2} - \overline{\mathcal{B}_y'^2}) \right] = 0, \quad (3.20)$$

$$\frac{d}{dy} [\overline{u'_y u'_z} - R_H \overline{\mathcal{B}'_y \mathcal{B}'_z}] = 0, \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{R_v} \frac{d^2 \overline{\mathcal{B}}_x}{dy^2} + \frac{d\overline{u}_x}{dy} - \frac{d}{dy} [\overline{u'_y \mathcal{B}'_x} - \overline{\mathcal{B}'_y u'_x}] = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{d}{dy} [\overline{u'_y \mathcal{B}'_z} - \overline{\mathcal{B}'_y u'_z}] = 0. \quad (3.23)$$

Так как все члены уравнений (3.19) и (3.20), за исключением членов, содержащих $\bar{\wp}$, являются функциями только \mathcal{U} , градиент давления $(\partial\bar{\wp}/\partial\mathcal{X})$ должен быть постоянным. Уравнение (3.20) можно проинтегрировать; в результате получим

$$\bar{\wp}_w - \bar{\wp} = \overline{u_y'^2} + \frac{R_H}{2} [\overline{\mathcal{B}_x^2} + \overline{\mathcal{B}_x'^2} + \overline{\mathcal{B}_z^2} - \overline{\mathcal{B}_y'^2}], \quad (3.24)$$

где $\bar{\wp}_w$ — безразмерное давление на стенке канала. Разность $\bar{\wp}_w - \bar{\wp}$ должна оцениваться при постоянном \mathcal{X} . Уравнение (3.24) описывает влияние так называемых динамического и магнитного давлений. Уравнения (3.21) и (3.23) можно проинтегрировать; в результате получим

$$\overline{u_y' u_z'} - R_H \overline{\mathcal{B}_y' \mathcal{B}_z'} = 0 \quad (3.25)$$

и

$$\overline{u_y' \mathcal{B}_z'} - \overline{\mathcal{B}_y' u_z'} = 0. \quad (3.26)$$

В уравнениях (3.24) — (3.26) содержится вся информация о переменных, входящих в эти уравнения, которая может быть получена осреднением уравнений (3.8) и (3.9).

Так как градиент давления должен быть постоянным, уравнения (3.19) и (3.22) образуют систему из двух уравнений для четырех неизвестных величин $\overline{u_x}$, $\overline{\mathcal{B}_x}$, $(\overline{u_x u_y'} - R_H \overline{\mathcal{B}_x' \mathcal{B}_y'})$ и $(\overline{u_y' \mathcal{B}_x'} - \overline{\mathcal{B}_y' u_x'})$. Поскольку ни одна из указанных четырех величин не входит в другие уравнения системы (3.19) — (3.23), уравнения (3.19) и (3.22) содержат всю информацию об этих переменных, которую можно получить посредством осреднения уравнений (3.8) и (3.9); этих осредненных уравнений недостаточно для определения распределений осредненной скорости и магнитного поля. В лучшем случае можно лишь представить $\overline{u_x}$ и $\overline{\mathcal{B}_x}$ в виде явных функций двух других переменных.

Можно, конечно, получить дополнительные уравнения, помножив уравнения (3.8) и (3.9) на компоненты векторов \mathbf{U} или \mathbf{B} (или на компоненты обоих векторов), а затем осреднив их; однако при этом вводится больше

новых переменных, чем уравнений. Можно было бы попытаться получить решение задачи, используя непосредственно уравнения (3.8) и (3.9) и избегав тем самым потери информации, свойственной методу осреднения и проявляющейся в том, что число уравнений оказывается меньше числа неизвестных. Однако такая попытка обречена на неудачу, поскольку граничные условия для мгновенных значений величин магнитного поля \mathbf{B} являются существенно неопределенными.

Градиент давления можно исключить из числа явных переменных уравнения (3.19), выбрав в качестве характерной скорости U_0 динамическую скорость

$$U_0 = \bar{u}^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \quad (3.27)$$

что дает

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = -1. \quad (3.28)$$

При этом число Рейнольдса Re , определяемое соотношением (3.3), становится идентичным с R^* , определяемым соотношением (2.6). Решая совместно уравнения (3.19) и (3.22), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}_x}{dy^2} - M^2 \bar{u}_x = & -R^* (1 + CR_H) + \\ & + R^* \frac{d}{dy} (\bar{u}'_x \bar{u}'_y - R_H \bar{\mathcal{B}}'_x \bar{\mathcal{B}}'_y) - M^2 (\bar{\mathcal{B}}'_x \bar{u}'_y - \bar{u}'_x \bar{\mathcal{B}}'_y), \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\mathcal{B}}_x}{dy^2} - M^2 \bar{\mathcal{B}}_x = & R_V R^* \mathcal{U} + R_V \frac{d}{dy} (\bar{\mathcal{B}}'_x \bar{u}'_y - \bar{u}'_x \bar{\mathcal{B}}'_y) - \\ & - R_V R^* (\bar{u}'_x \bar{u}'_y - R_H \bar{\mathcal{B}}'_x \bar{\mathcal{B}}'_y), \end{aligned} \quad (3.30)$$

где

$$M^2 = R^* R_V R_H = \frac{\sigma B_0^2 L^2}{\eta} \quad (3.31)$$

есть квадрат числа Гартмана для течения в канале, а

$$C = \left[\frac{d \bar{\mathcal{B}}_x}{dy} \right]_{\text{ст}} \quad (3.32)$$

есть значение на стенке, которое должно быть определено.

Уравнения (3.29) и (3.30) и граничные условия для \overline{u}_x и $\overline{\mathcal{B}}_x$ образуют две системы типа

$$\frac{d^2\varphi}{d\mathcal{Y}^2} - M^2\varphi = \Phi(\mathcal{Y}), \quad \varphi(\pm 1) = 0,$$

где $\varphi(\mathcal{Y})$ — зависимая переменная, а $\Phi(\mathcal{Y})$ — возбуждающая функция. Решение уравнения этого типа можно записать в виде

$$\varphi(\mathcal{Y}) = - \int_{-1}^{+1} G(\mathcal{Y}, r) \Phi(r) dr,$$

где $G(\mathcal{Y}, r)$ — функция Грина

$$G(\mathcal{Y}, r) = \begin{cases} \frac{\text{sh } M(1-r) \text{sh } M(1+\mathcal{Y})}{M \text{sh } 2M}, & -1 \leq \mathcal{Y} \leq r, \\ \frac{\text{sh } M(1+r) \text{sh } M(1-\mathcal{Y})}{M \text{sh } 2M}, & r \leq \mathcal{Y} \leq 1. \end{cases} \quad (3.33)$$

Используя обозначения

$$P_1(\mathcal{Y}) \equiv \overline{u}'_x \overline{\mathcal{B}}'_y - \overline{\mathcal{B}}'_x \overline{u}'_y, \quad (3.34)$$

$$Q_1(\mathcal{Y}) \equiv \overline{u}'_x \overline{u}'_y - R_H \overline{\mathcal{B}}'_x \overline{\mathcal{B}}'_y, \quad (3.35)$$

\overline{u}_x и $\overline{\mathcal{B}}_x$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \overline{u}_x = & (1 + CR_H) \frac{R^*}{M^2} \left[1 - \frac{\text{ch } M\mathcal{Y}}{\text{ch } M} \right] - \\ & - \int_{-1}^{+1} G(\mathcal{Y}, r) \left[R^* \frac{dQ_1(r)}{dr} + M^2 P_1(r) \right] dr \end{aligned} \quad (3.36)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\mathcal{B}}_x}{R_V} = & - \frac{R^*}{M^2} \left[\mathcal{Y} - \frac{\text{sh } M\mathcal{Y}}{\text{sh } M} \right] + \\ & + \int_{-1}^{+1} G(\mathcal{Y}, r) \left[\frac{dP_1(r)}{dr} + R^* Q_1(r) \right] dr. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Из уравнений (3.32) и (3.37) находим величину $(1 + CR_H)$, входящую в уравнение (3.36):

$$\begin{aligned} (1 + CR_H) = & \frac{M \text{ch } M}{\text{sh } M} + \\ & + \frac{M^2}{2R^* \text{sh } M} \int_{-1}^{+1} [MP_1(r) \text{ch } Mr - R^* Q_1(r) \text{sh } Mr] dr. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Уравнения (3.36) и (3.37) можно далее преобразовать к виду, подобному (3.38), где в подынтегральное выражение входят функции $MP_1(r)$ и $R^*Q_1(r)$ с весом в виде гиперболического синуса и косинуса от аргумента Mr^1). Однако приводить здесь эти преобразования вряд ли целесообразно, так как основная цель данного анализа, состоящая в установлении системы безразмерных параметров, наилучшим образом описывающих течение, может быть достигнута с помощью уже выведенных формул.

Имеются только три независимых безразмерных параметра, описывающих магнитогидродинамические течения. Для рассматриваемого течения в канале в качестве этих трех параметров можно выбрать R^* , M и R_V . Тогда четвертый используемый здесь параметр, R_H , можно определить из соотношения (3.31). Из уравнений (3.33) — (3.38) видно, что переменные \bar{u}_x и $\bar{\mathcal{B}}_x/R_V$ можно представить в виде явных функций только \mathcal{U} , M и R^* ; зависимость же от R_V будет проявляться лишь через посредство зависящих от R_V корреляционных функций P_1 и Q_1 .

В следующей главе мы будем предполагать, что \bar{u}_x зависит только от \mathcal{U} , R^* и M . Это эквивалентно предположению о том, что P_1 и Q_1 также зависят только от \mathcal{U} , R^* и M . Физический смысл этого предположения можно уяснить, проанализировав значение каждого члена в уравнении (3.29). Это уравнение описывает равновесие приложенных к элементарному объему сил, в число которых входят силы, обусловленные вязкостью, давлением, переносом импульса и взаимодействием тока с магнитным полем. Для отождествления членов перепишем уравнение (3.29) в виде

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{R^*} \frac{d^2 \bar{u}_x}{d\mathcal{U}^2} + \frac{M^2}{R^*} [\bar{u}_x + (\bar{u}'_x \mathcal{B}'_y - \mathcal{B}'_x \bar{u}'_y)] - \\ & - \frac{d}{d\mathcal{U}} (R_H \bar{\mathcal{B}}'_x \mathcal{B}'_y) + \frac{d}{d\mathcal{U}} (\bar{u}'_x \bar{u}'_y) - (1 + CR_H) = 0. \end{aligned} \quad (3.29a)$$

¹⁾ Если функции P_1 и Q_1 всюду равны нулю, течение является ламинарным и уравнения (3.36) — (3.38) сводятся к решению Гартмана для ламинарного течения в постоянном магнитном поле.

Первый член уравнения (3.29а) есть безразмерная осредненная сила вязкого сопротивления на единицу объема. Второй член представляет собой с точностью до постоянной безразмерную силу взаимодействия осредненного тока и осредненного магнитного поля. При рассматриваемых здесь условиях только z -компонента осредненного тока отлична от нуля, и z -компонента напряженности электрического поля должна быть постоянной. Это можно доказать при помощи уравнений (3.2а) и (3.2б). Для осредненного тока в направлении оси z имеем

$$\bar{\mathcal{I}}_z = \overline{u_x \mathcal{B}_y} - \overline{\mathcal{B}_x u_y} + \bar{\mathcal{E}}_z,$$

или

$$\bar{\mathcal{I}}_z = \bar{u}_x + (\overline{u'_x \mathcal{B}'_y} - \overline{\mathcal{B}'_x u'_y}) + \bar{\mathcal{E}}_z, \quad (3.39)$$

где постоянная $\bar{\mathcal{E}}_z$ определяется из условия, что среднее по пространству значение $\bar{\mathcal{I}}_z$ равно нулю. Третий член уравнения (3.29а) есть сила взаимодействия пульсаций тока с пульсациями магнитного поля. Четвертый член представляет собой силу, которая обусловлена переносом импульса, связанным с пульсациями скорости. Последний член описывает действие приложенного градиента давления; в него входит также постоянная поправка ко второму члену.

Так как можно ожидать, что осредненный ток, вызванный взаимодействием осредненных величин скорости и магнитного поля, будет значительно больше осредненных токов, обусловленных пульсационными величинами скорости и магнитного поля, а также пульсационных токов, предположение о том, что величины

$$[\overline{u'_x \mathcal{B}'_y} - \overline{\mathcal{B}'_x u'_y}]$$

и

$$\frac{d[\overline{R_H \mathcal{B}'_x \mathcal{B}'_y}]}{d\mathcal{Y}}$$

являются функциями только \mathcal{Y} , R^* и M , по-видимому не внесет больших ошибок в рассчитанное распределение скоростей. Ошибку, связанную с использованием

того же предположения относительно величины

$$\frac{d [\overline{u'_x u'_y}]}{d\mathcal{Y}},$$

оценить труднее. Однако на эту корреляцию пульсационных скоростей может воздействовать лишь механизм, порождающий физические силы, а параметр, которым пренебрегается (R_V), входит только в выражения для сил, обусловленных взаимодействием токов с создаваемыми этими токами возмущениями магнитного поля. Таким образом, с высокой степенью точности данную корреляцию пульсационных скоростей можно также считать функцией только \mathcal{Y} , R^* и M .

При сравнении уравнений для осредненной скорости течений в постоянном магнитном поле и в бегущем электромагнитном поле полезна другая форма уравнения (3.29). Используя уравнения (3.32), (3.26) и (3.39), постоянную C , входящую в уравнение (3.29), можно развить в виде

$$C = -R_V \bar{\mathcal{E}}_z,$$

или, осредняя по пространству уравнение (3.39),

$$C = R_V \langle \bar{u}_x + (\overline{u'_x \mathcal{P}'_y} - \overline{\mathcal{P}'_x u'_y}) \rangle, \quad (3.40)$$

где символ $\langle \rangle$ указывает осреднение по пространству. Тогда с помощью (3.34) и (3.35) уравнение (3.29а) можно преобразовать к виду

$$-\frac{1}{R^*} \frac{d^2 \bar{u}_x}{d\mathcal{Y}^2} + \frac{M^2}{R^*} [\bar{u}_x + P_1 - \langle \bar{u}_x + P_1 \rangle] + \frac{dQ_1}{d\mathcal{Y}} = 1. \quad (3.29б)$$

Первый член в левой части уравнения (3.29б) представляет осредненное вязкое сопротивление, испытываемое единицей объема жидкости; второй дает осредненное магнитогидродинамическое торможение, обусловленное взаимодействием осредненных вихревых токов и осредненного магнитного поля; в третий член входят определяемые пульсациями скорости напряжения Рейнольдса и осредненное магнитогидродинамическое торможение,

обусловленное взаимодействием пульсационных составляющих тока и магнитного поля. Правая часть изображает осредненный эффективный градиент давления, обеспечивающий движение жидкости. В гл. IX будет показано, что равновесие сил, приложенных к элементу жидкости в турбулентном потоке, создаваемом бегущим электромагнитным полем, описывается при определенных предположениях уравнением, почти идентичным (3.296).

Глава IV

ИССЛЕДОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ

§ 1. Основные соотношения

Для турбулентного магнитогидродинамического течения между двумя параллельными плоскостями можно провести анализ, подобный анализу Милликена для течений при отсутствии магнитного поля. Из результатов предыдущей главы следует приближенное соотношение, справедливое для всего канала,

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = f_3(R^*, M, \xi), \quad (4.1)$$

где f_3 — неизвестная функция, а ξ определено соотношением (2.7).

Соотношение (2.9а) остается справедливым и при наличии магнитных полей, поэтому можно ожидать, что распределение скорости вблизи стенки не зависит от размера канала L . Таким образом, для точек, достаточно близких к стенке, соотношение (4.1) сводится к следующему:

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = X(R^*\xi, M\xi). \quad (4.2)$$

Так как основное проявление магнитогидродинамического взаимодействия заключается в изменении характера течения в сторону «пробкового» режима, при котором жидкость движется как единое целое с однородным профилем скорости, влияние молекулярной вязкости в центральном ядре потока для магнитогидродинамических течений должно быть менее существенным, чем для соответствующих течений при отсутствии магнитного поля. Поэтому мы по-прежнему предполагаем, что локальная структура ядра течения не должна зави-

сеть от вязкости жидкости, и в качестве магнитогидродинамической аналогии закона дефекта скорости используем соотношение

$$\frac{\bar{U} - \bar{u}}{\bar{u}^*} = \Psi\left(\frac{M^2}{R^*}, \xi\right), \quad (4.3)$$

где, как и прежде, \bar{U} — значение осредненной скорости в центре канала.

Соотношения (4.1) и (4.3) дают для \bar{u}/\bar{u}^* выражение, которое отличается от (4.2), но может быть совместно с ним. Предполагая, что в некоторой области значений ξ оба выражения справедливы, получаем условие сопряжения, которому должны удовлетворять три неизвестные функции X , Φ и Ψ :

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}^*} = X(R^*\xi, M\xi) = \Phi(R^*, M) - \Psi\left(\frac{M^2}{R^*}, \xi\right), \quad (4.4)$$

где $\Phi(R^*, M) = \bar{U}/\bar{u}^*$. Дифференцирование уравнения (4.4) по ξ , R^* и M дает

$$\frac{\partial(\bar{u}/\bar{u}^*)}{\partial\xi} = R^* \frac{\partial X}{\partial(R^*\xi)} + M \frac{\partial X}{\partial(M\xi)} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial(\bar{u}/\bar{u}^*)}{\partial R^*} = \xi \frac{\partial X}{\partial(R^*\xi)} = \frac{\partial\Phi}{\partial R^*} + \left(\frac{M}{R^*}\right)^2 \frac{\partial\Psi}{\partial(M^2/R^*)} \quad (4.6)$$

и

$$\frac{\partial(\bar{u}/\bar{u}^*)}{\partial M} = \xi \frac{\partial X}{\partial(M\xi)} = \frac{\partial\Phi}{\partial M} - 2 \frac{M}{R^*} \frac{\partial\Psi}{\partial(M^2/R^*)}. \quad (4.7)$$

Подставляя (4.6) и (4.7) в (4.5), получаем

$$R^* \frac{\partial\Phi}{\partial R^*} + M \frac{\partial\Phi}{\partial M} = -\xi \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} + \frac{M^2}{R^*} \frac{\partial\Psi}{\partial(M^2/R^*)}. \quad (4.8)$$

Поскольку левая часть уравнения (4.8) может зависеть только от R^* и M , а правая — только от ξ и M^2/R^* , обе эти части должны быть функциями только M^2/R^* . Таким образом, это уравнение приводит к двум соотношениям:

$$R^* \frac{\partial\Phi}{\partial R^*} + M \frac{\partial\Phi}{\partial M} = g_1\left(\frac{M^2}{R^*}\right) \quad (4.9)$$

1

$$-\xi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{M^2}{R^*} \frac{\partial \Psi}{\partial (M^2/R^*)} = g_1 \left(\frac{M^2}{R^*} \right), \quad (4.10)$$

где g_1 — произвольная функция.

Аналогично, исключая Ψ из уравнений (4.6) и (4.8), получаем

$$2R^*\xi \frac{\partial X}{\partial (R^*\xi)} + M\xi \frac{\partial X}{\partial (M\xi)} = 2R^* \frac{\partial \Phi}{\partial R^*} + M \frac{\partial \Phi}{\partial M}. \quad (4.11)$$

Поскольку левая часть уравнения (4.11) зависит только от $R^*\xi$ и $M\xi$, а правая — только от R^* и M , обе эти части должны быть функциями только M/R^* . Таким образом,

$$2R^*\xi \frac{\partial X}{\partial (R^*\xi)} + M\xi \frac{\partial X}{\partial (M\xi)} = g_2 \left(\frac{M}{R^*} \right) \quad (4.12)$$

и

$$2R^* \frac{\partial \Phi}{\partial R^*} + M \frac{\partial \Phi}{\partial M} = g_2 \left(\frac{M}{R^*} \right), \quad (4.13)$$

где g_2 — другая произвольная функция.

Уравнения (4.9) и (4.13) определяют Φ через функции g_1 и g_2 . Решение имеет вид

$$\Phi(R^*, M) = G_1 \left(\frac{M^2}{R^*} \right) + G_2 \left(\frac{M}{R^*} \right), \quad (4.14)$$

где G_1 и G_2 — неопределенные интегралы:

$$G_1(x) = \int \frac{g_1(x)}{x} dx \quad (4.15)$$

и

$$G_2(x) = - \int \frac{g_2(x)}{x} dx. \quad (4.16)$$

Справедливость этого решения легко проверяется простой подстановкой в уравнения (4.9) и (4.13). В том, что решение единственно, можно убедиться, записав по отдельности общие решения уравнений (4.9) и (4.13) и потребовав их совместности.

Общие решения уравнений (4.10) и (4.12) соответственно будут иметь вид

$$\Psi \left(\frac{M^2}{R^*}, \xi \right) = G_3 \left(\frac{M^2\xi}{R^*} \right) + G_1 \left(\frac{M^2}{R^*} \right) \quad (4.17)$$

и

$$X(R^*\xi, M\xi) = G_4\left(\frac{M^2\xi}{R^*}\right) + G_2\left(\frac{M}{R^*}\right), \quad (4.18)$$

где G_3 и G_4 также являются произвольными функциями. Условие

$$\Psi\left(\frac{M^2}{R^*}, 1\right) = 0$$

требует выполнения равенства

$$G_3(x) = -G_1(x).$$

Аналогично, для удовлетворения условия (4.4) в некоторой области значений R^* , M и ξ необходимо, чтобы

$$G_4(x) = G_1(x).$$

Таким образом, три функции Φ , Ψ и X можно выразить через G_1 и G_2 :

$$\Phi(R^*, M) = G_1\left(\frac{M^2}{R^*}\right) + G_2\left(\frac{M}{R^*}\right), \quad (4.19a)$$

$$\Psi\left(\frac{M^2}{R^*}, \xi\right) = -G_1\left(\frac{M^2\xi}{R^*}\right) + G_1\left(\frac{M^2}{R^*}\right), \quad (4.19б)$$

$$X(R^*\xi, M\xi) = G_1\left(\frac{M^2\xi}{R^*}\right) + G_2\left(\frac{M}{R^*}\right). \quad (4.19в)$$

Более удобную форму уравнений (4.19) можно получить, если заново определить основные функции. Пусть

$$G_1(x) = A \ln x + F_1(x)$$

и

$$G_2(x) = -2A \ln x + C + F_2(x).$$

Тогда уравнения (4.19) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}}{\bar{u}^*} &= A \ln R^* + C + F_1\left(\frac{M^2}{R^*}\right) + F_2\left(\frac{M}{R^*}\right), \\ \frac{\bar{U} - \bar{u}}{\bar{u}^*} &= -A \ln \xi - F_1\left(\frac{M^2\xi}{R^*}\right) + F_1\left(\frac{M^2}{R^*}\right), \\ \frac{\bar{u}}{\bar{u}^*} &= A \ln(R^*\xi) + C + F_1\left(\frac{M^2\xi}{R^*}\right) + F_2\left(\frac{M}{R^*}\right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Уравнения (4.20) имеют то преимущество, что значения постоянных A и C могут быть выбраны по результатам имеющихся экспериментов, относящихся к течениям при отсутствии магнитного поля. При таком представлении основных соотношений неизвестные функции F_1 и F_2 , входящие в уравнения (4.20), обращаются в нуль, когда число Гартмана M равно нулю.

§ 2. Коэффициент сопротивления

Предыдущие уравнения позволяют определить соотношение между перепадом давления и расходом при течении в канале. Как и прежде, определим коэффициент сопротивления равенством

$$f = \frac{8\tau_0}{\rho \bar{V}^2} = 8 \frac{\bar{u}^{*2}}{\bar{V}^2}$$

и проинтегрируем уравнение для дефекта скорости (4.3) по ξ от 0 до 1. В результате получим приближенное соотношение между максимальной скоростью \bar{U} и средней по сечению скоростью \bar{V}

$$\frac{\bar{U} - \bar{V}}{\bar{u}^*} = A + F_1\left(\frac{M^2}{R^*}\right) - \int_0^1 F_1\left(\frac{M^2\xi}{R^*}\right) d\xi. \quad (4.21)$$

Подстановка выражения $\bar{U}/\bar{u}^* = \Phi(R^*, M)$ в (4.21) дает

$$\frac{\bar{V}}{\bar{u}^*} = A \ln R^* + C - A + F_2\left(\frac{M}{R^*}\right) + \int_0^1 F_1\left(\frac{M^2\xi}{R^*}\right) d\xi. \quad (4.22)$$

Так как

$$\frac{\bar{V}}{\bar{u}^*} = \sqrt{\frac{8}{f}}$$

и

$$R^* = \frac{R_{DH}}{4} \frac{\bar{u}^*}{\bar{V}} = \sqrt{\frac{f}{8}} \frac{R_{DH}}{4},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f}} = & C_1 \lg(R_{DH} \sqrt{f}) + C_2 + \frac{1}{\sqrt{8}} F_2\left(\frac{4\sqrt{8} M}{R_{DH} \sqrt{f}}\right) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{8}} \int_0^1 F_1\left(\frac{4\sqrt{8} M^2 \xi}{R_{DH} \sqrt{f}}\right) d\xi, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где постоянные C_1 и C_2 — те же, что и в уравнении (2.23), т. е. они получены из экспериментов с течениями при отсутствии магнитного поля.

Уравнения (4.20) и (4.23) представляют собой основные результаты исследования магнитогидродинамического течения в канале с помощью теории размерностей. Эти уравнения содержат две неизвестных функции, каждая из которых зависит от одного безразмерного параметра. Указанные функции можно определить только с помощью дополнительной информации, относящейся к задаче; возможности, связанные с использованием одной лишь теории размерностей, уже исчерпаны.

Как будет показано ниже, имеющиеся экспериментальные данные позволяют заключить, что функцией F_2 можно пренебречь; кроме того, на основе этих данных можно определить функцию F_1 эмпирически и построить ее аналитическую аппроксимацию.

Для обработки некоторых экспериментальных данных более удобна иная форма уравнения (4.23). Так как величина

$$C_1 \lg R_{DH} \sqrt{f} + C_2$$

зависит только от R^* и при отсутствии магнитного поля представляет собой $1/\sqrt{f}$, уравнения (4.23) можно записать в виде

$$\left[\frac{1}{\sqrt{f}} - \left(\frac{1}{\sqrt{f}} \right)_{M=0} \right]_{R^* = \text{const}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{8}} F_2 \left(\frac{M}{R^*} \right) + \frac{R^*}{\sqrt{8} M^2} \int_0^{M^2/R^*} F_1(x) dx. \quad (4.24)$$

Глава V¹⁾

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Одной из первых работ по магнитогидродинамическим течениям в каналах была статья Гартмана [6], опубликованная в 1937 г. В этой работе содержится весьма полное исследование ламинарного течения проводящей жидкости в канале прямоугольного поперечного сечения с большим отношением сторон при наличии однородного поперечного магнитного поля. Гартман определил профиль скорости, соотношение между перепадом давления и расходом и рассмотрел работу такой конфигурации в режиме демпфера, магнитогидродинамического генератора и магнитогидродинамического насоса. Наиболее важным для нас результатом, полученным в этой статье, является формула для коэффициента сопротивления при ламинарном течении

$$f = \frac{32}{R_{DH}} \frac{M^2 \operatorname{th} M}{M - \operatorname{th} M}. \quad (5.1)$$

Во второй статье [7], опубликованной также в 1937 г., Гартман и Лазарус привели результаты большой серии экспериментов, целью которых было исследование ламинарных и турбулентных течений в небольших каналах, включая переходный режим, при наличии постоянного магнитного поля. Эти эксперименты охватывают широкий диапазон отношений сторон поперечного сечения канала, от 17:1 до 1:1; испытания проводились в магнитном поле, направленном параллельно большой

¹⁾ Описываемые в настоящей главе экспериментальные исследования Гартмана и Лазаруса и Мергетройда основаны на их работах [7, 8], перевод которых приведен в Дополнении к данной книге (статьи 4 и 5). — *Прим. ред.*

стороне. К сожалению, наибольшее значение отношения сторон, при котором достигался интересующий нас турбулентный режим, составляло 6 : 1.

Полученные результаты качественно были почти одинаковы во всех экспериментах. Была подтверждена теоретическая формула Гартмана для коэффициента сопротивления; это соотношение дает лучший из имеющихся способов определения характера течения (турбулентный или ламинарный) для заданного потока. Оказалось, что численный коэффициент, равный 32 в формуле (5.1), является в действительности функцией отношения сторон, как и следовало ожидать, учитывая результаты соответствующих экспериментальных исследований течений в каналах при отсутствии магнитного поля. Наилучшее соответствие теории и эксперимента было получено, когда множитель, зависящий от отношения сторон, был включен также и в определение числа M .

Эти эксперименты показали, что условия перехода ламинарного течения в канал в турбулентное могут быть рассчитаны с хорошей точностью с помощью простого предположения о том, что переход происходит при определенном значении коэффициента сопротивления. Результаты экспериментов свидетельствуют также о том, что при ламинарном режиме действие магнитного поля на течение проявляется в подавлении турбулентности и расширении диапазона условий, при которых течение является устойчивым, а при турбулентном режиме увеличение магнитного поля обычно приводит к уменьшению перепада давления, необходимого для поддержания заданного расхода. При использовании умеренных магнитных полей перепад давления, необходимый для поддержания постоянного расхода, снижался более чем на 10%.

Последний результат особенно интересен, так как он указывает на противоположный эффект магнитного поля по сравнению со случаем ламинарного течения, как это можно видеть из формулы (5.1); он также противоположен результатам, полученным позже Мергетройдом при несколько отличающихся условиях течения. Гартман и Лазарус дали качественное объяснение обнаруженного в их экспериментах эффекта, отметив, что

в турбулентном потоке всегда присутствует беспорядочное вихревое движение, наложенное на осредненное движение. Хотя это вихревое движение не дает прямого вклада в осредненное течение в канале, оно тем не менее обуславливает перенос количества движения, необходимый для поддержания профиля осредненной скорости. Помимо взаимодействия между осредненным движением жидкости и магнитным полем, обнаруженного в ламинарных течениях, в турбулентных потоках существует также прямое воздействие магнитного поля на вихри. Поле стремится подавить вихри путем электромеханического торможения и в первом приближении не дает взамен никаких сил для поддержания профиля осредненной скорости. Таким образом, наложение магнитного поля влечет за собой изменение профиля осредненной скорости, которое продолжается до тех пор, пока осредненные вязкие напряжения и электромеханические взаимодействия магнитного поля и осредненного движения жидкости не видоизменяются настолько, чтобы установилось равновесие сил. В результате может произойти как увеличение, так и уменьшение расхода при заданном перепаде давления.

В 1953 г. Мергетройд [12] опубликовал результаты своих экспериментальных исследований турбулентного течения в прямоугольном канале с отношением сторон 15 : 1, а также переходного режима. Подобно Гартману и Лазарусу, Мергетройд установил, что переход, по-видимому, происходит при определенном значении коэффициента сопротивления. Выражением этого результата Мергетройда является предположением, что ламинарное течение устойчиво при $R_{DH} < 900 M$, а турбулентное течение устойчиво при $R_{DH} > 900 M$. При больших значениях M , имевших место для переходной области в экспериментах Мергетройда ($M > 25$), формула (5.1) принимает вид

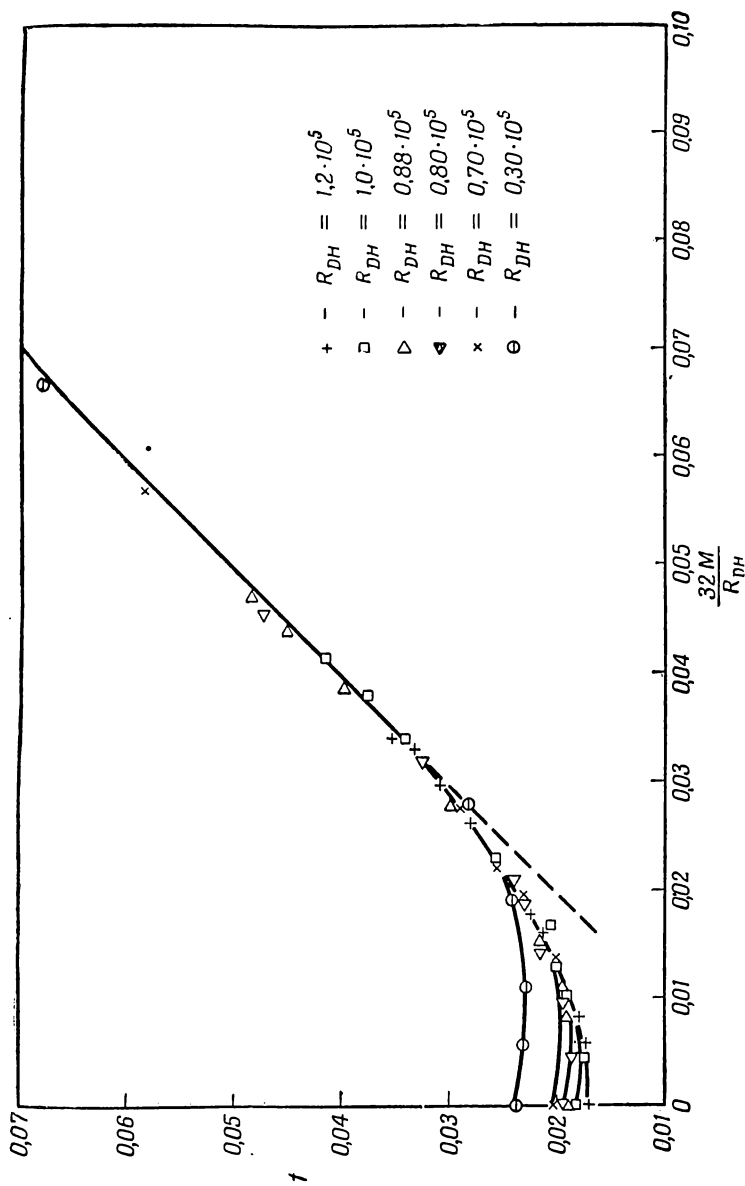
$$f \approx \frac{32M}{R_{DH}}. \quad (5.2)$$

Следовательно, результат Мергетройда эквивалентен определению значения коэффициента сопротивления при переходе (которое приближенно равно 0,035). Исполь-

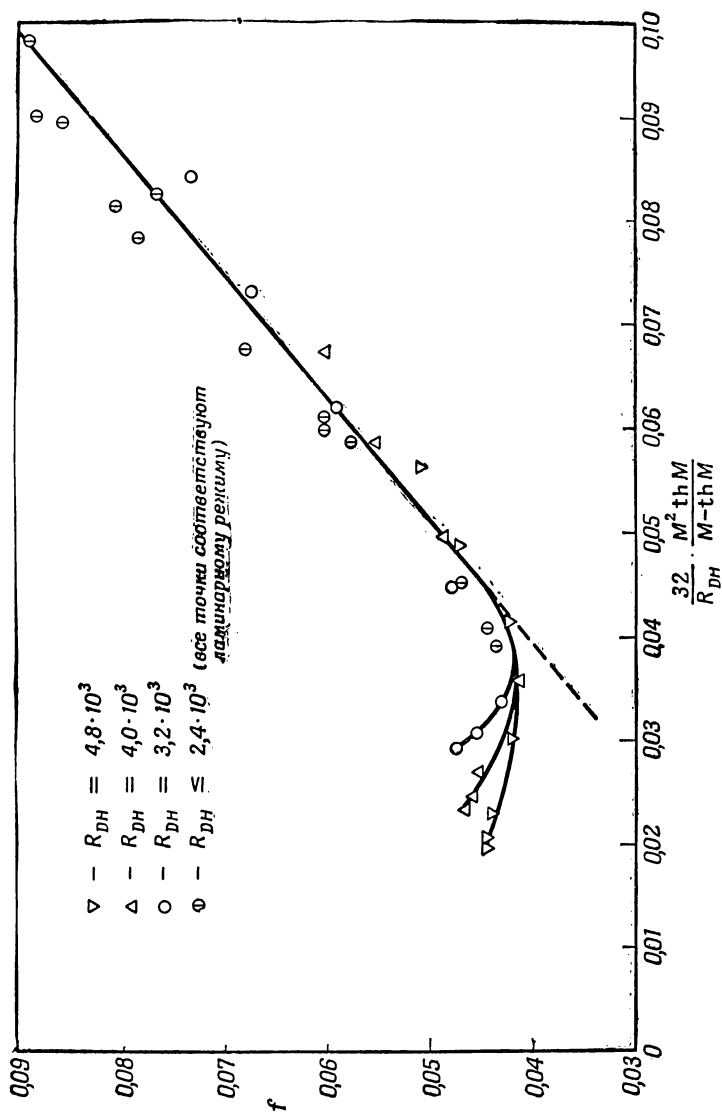
зую сильные поля, Мергетройд получил ламинарное течение вплоть до числа Рейнольдса $R_{DH} = 1,2 \cdot 10^5$; это наибольшее из достигнутых в его экспериментах значений числа Рейнольдса в 60 раз превышает предел устойчивости течения при отсутствии магнитного поля.

В экспериментах Мергетройда установлена зависимость коэффициента сопротивления от напряженности магнитного поля при турбулентном течении, которая отличается от найденной Гартманом и Лазарусом. В то время как в работе Гартмана и Лазаруса указывается, что наложение слабых магнитных полей вызывает явное уменьшение градиента давления, необходимого для поддержания заданного расхода, большая часть данных Мергетройда обнаруживает почти монотонное возрастание перепада давления с ростом напряженности магнитного поля. Основным исключением из найденной закономерности является кривая, соответствующая значению числа Рейнольдса $R_{DH} = 10^4$, наименьшему из достигнутых в экспериментах Мергетройда. Однако возможные ошибки измерения перепада давления в этом случае так велики, что при графическом представлении результатов Мергетройд ограничился нанесением точек, не пытаясь провести по ним кривую. Тем не менее между упомянутыми двумя сериями экспериментов нет противоречия, поскольку в экспериментах Мергетройда число Рейнольдса $R_{DH} > 10^4$, а в экспериментах Гартмана и Лазаруса $R_{DH} < 5500$, и обнаруженные различия могут быть объяснены с помощью теории подобия.

На фиг. 5 и 6 представлены некоторые данные, полученные Мергетройдом, а также Гартманом и Лазарусом. Основные численные результаты, использованные при построении этих кривых, приведены в табл. 2. Фиг. 5 содержит все данные Мергетройда, за исключением результатов для числа Рейнольдса $R_{DH} = 10^4$, которые были отброшены как ненадежные вследствие неточности измерения малых перепадов давления, присущей части этих опытов. На фиг. 6 представлены экспериментальные данные Гартмана и Лазаруса для канала с отношением сторон 6 : 1. Обе фигуры построены так, что точки, соответствующие ламинарному течению, располагаются на прямых, которые на них проведены.



Ф и г. 5. Графическое представление экспериментальных данных Мергетройда [12].



Ф и г. 6. Графическое представление экспериментальных данных Гартмана и Лазаруса [7].

Абсциссы этих фигур различаются, причем данные Гартмана и Лазаруса для f нанесены в зависимости от более точного выражения для коэффициента сопротивления при ламинарном течении [формула (5.1)], а данные Мергетройда представлены в зависимости от величины, выражающей коэффициент сопротивления по приближенной формуле (5.2). Это различие обусловлено тем, что максимальное значение числа M , достигнутое в экспериментах Гартмана и Лазаруса, составляло около 7,5, тогда как минимальное значение M в переходной области в экспериментах Мергетройда равнялось примерно 25. Таким образом, для данных Мергетройда указанное приближенное выражение обеспечивает достаточную точность.

Имеются некоторые различия в возможных ошибках при проведении расчетов, основанных на результатах этих двух серий экспериментов. В обоих случаях использовались течения ртути и проводились по существу одинаковые измерения объемного расхода, магнитного поля и перепада давления на известной длине. Изучение указанных работ подтверждает проявленную авторами тщательность при определении и сведении к минимуму источников погрешностей экспериментов. Одно различие связано со способом получения используемых числовых величин. Мергетройд составил таблицу безразмерных величин — $f/4$, R_{DH} и M , которые он рассчитал по своим экспериментальным данным. Гартман и Лазарус привели в малом масштабе кривые зависимости перепада давления от напряженности магнитного поля при постоянном значении расхода. В процессе снятия с этих кривых необходимых числовых значений может вводиться дополнительная ошибка в f , R_{DH} и M порядка 1—2% по сравнению со случаем, когда обрабатываются данные Мергетройда. Более значительная разница обусловлена различием размеров каналов, использованных в этих двух работах. Канал, с которым работал Мергетройд, имел размеры $6,76 \times 101,6$ мм; канал с отношением сторон 6:1 в экспериментах Гартмана и Лазаруса имел размеры $0,6 \times 3,72$ мм. Так как абсолютная ошибка измерений с помощью микрометра и микроскопа, использовавшихся

Таблица 2

Численные данные, определенные по результатам экспериментов Мергетройда, а также Гартмана и Лазаруса

№	$R_{DH} \cdot 10^{-3}$	M	$f \cdot 10^3$	$1/\sqrt{f}$	$R^* \cdot 10^{-3}$	$\frac{M}{R_{DH}} \cdot 10^4$	$\frac{M}{R^*} \cdot 10^2$	M^2/R^*
По данным Мергетройда								
1	121	0	17,1	7,65	1,40	0	0	0
2	122	22	17,3	7,60	1,42	1,80	1,55	0,34
3	121	31	17,9	7,47	1,43	2,56	1,65	0,67
4	121	60,3	21,2	6,86	1,56	4,98	3,87	2,33
5	121	66,8	22,3	6,69	1,60	5,52	4,18	2,79
6	122	86,5	25,6	6,25	1,72	7,09	5,02	4,34
7	121	99,8	28,1	5,97	1,79	8,25	5,57	5,56
8	121	112,5	30,7	5,71	1,87	9,30	6,01	6,76
9	121	125,5	33,3	5,48	1,95	10,4	6,43	8,07
10	121	129,0	35,2	5,33	2,01	10,7	6,43	8,29
11	101	0	18,3	7,39	1,21	0	0	0
12	102	14,3	17,6	7,53	1,20	1,40	1,19	0,17
13	102	32,6	18,9	7,28	1,24	3,20	2,63	0,86
14	102	40,7	19,9	7,09	1,27	3,99	3,20	1,30
15	101	49,2	20,7	6,95	1,28	4,87	3,83	1,89
16	101	72,2	25,6	6,25	1,43	7,15	5,05	3,65
17	100	105,8	34,0	5,42	1,63	10,6	6,49	6,86
18	100	118,5	37,4	5,17	1,71	11,9	6,93	8,21
19	101	130,5	41,3	4,92	1,81	12,9	7,19	9,39
20	88	0	18,7	7,32	1,06	0	0	0
21	88	0	18,5	7,35	1,06	0	0	0
22	88	23,0	18,9	7,28	1,07	2,61	2,15	0,49
23	88	30,0	19,5	7,16	1,09	3,41	2,76	0,83
24	88	42,1	21,4	6,84	1,14	4,78	3,70	1,56
25	87	75,7	29,5	5,82	1,32	8,70	5,73	4,34
26	87	105,8	39,4	5,04	1,53	12,2	6,93	7,33
27	88	120,5	44,8	4,72	1,65	13,7	7,32	8,82
28	87	128,8	48,0	4,56	1,68	14,8	7,64	9,85
29	80	0	19,2	7,21	0,98	0	0	0
30	80	11,5	18,6	7,33	0,96	1,44	1,19	0,14
31	81	24,2	19,5	7,16	1,00	2,99	2,42	0,59

Продолжение табл. 2

№	$R_{DH} \cdot 10^{-3}$	M	$f \cdot 10^3$	$1/\sqrt{f}$	$R^* \cdot 10^{-3}$	$\frac{M}{R_{DH}} \cdot 10^4$	$\frac{M}{R^*} \cdot 10^2$	M^2/R^*
32	80	35,9	21,2	6,86	1,03	4,49	3,48	1,25
33	80	46,2	23,0	6,60	1,07	5,78	4,31	1,99
34	80	51,9	24,1	6,44	1,10	6,49	5,70	2,45
35	80	80,3	32,4	5,55	1,27	10,0	6,31	5,06
36	81	115,0	46,9	4,62	1,55	14,2	7,42	8,53
37	70	0	20,0	7,08	0,87	0	0	0
38	70	20,3	19,6	7,14	0,87	2,90	2,34	0,48
39	70	29,0	20,0	7,07	0,88	4,14	3,31	0,96
40	70,5	42,4	23,3	6,55	0,95	6,01	4,46	1,89
41	70,5	48,4	25,2	6,30	0,99	6,87	4,88	2,36
42	70	60,0	29,0	5,88	1,05	8,57	5,70	3,42
43	70	124,7	57,3	4,18	1,48	17,8	8,42	10,5
44	30	0	23,8	6,48	0,41	0	0	0
45	30	5,2	23,2	6,56	0,40	1,73	1,29	0,07
46	30	10,4	23,4	6,53	0,41	3,47	2,56	0,27
47	30	18,0	24,0	6,45	0,41	6,00	4,38	0,79
48	30	26,0	28,2	5,95	0,45	8,67	5,84	1,52
49	30	63,1	68,4	3,82	0,69	21,0	9,10	5,74

По данным Гартмана и Лазаруса

1	3,25	0	47,9	4,57	0,0628	0	0	0
2	3,25	0,79	45,3	4,70	0,0611	2,42	1,29	0,010
3	3,25	1,57	43,1	4,82	0,0595	4,84	2,64	0,041
4	3,25	3,14	47,6	4,58	0,0626	9,68	5,02	0,158
6	3,25	5,11	58,0	4,15	0,0691	15,7	7,39	0,378
5	3,25	6,29	67,3	3,86	0,0744	19,4	8,45	0,531
7	3,25	7,46	72,9	3,70	0,0775	23,0	9,64	0,719
8	4,06	0	46,5	4,64	0,0773	0	0	0
9	4,06	0,79	45,9	4,67	0,0769	1,94	1,02	0,008
10	4,06	1,57	45,2	4,70	0,0763	3,87	2,06	0,032
11	4,06	3,14	41,6	4,90	0,0732	7,75	4,30	0,135
12	4,06	5,11	48,5	4,54	0,0790	12,6	6,47	0,330
13	4,06	6,29	55,1	4,26	0,0842	15,5	7,46	0,469
14	4,06	7,46	60,0	4,08	0,0878	18,4	8,50	0,634

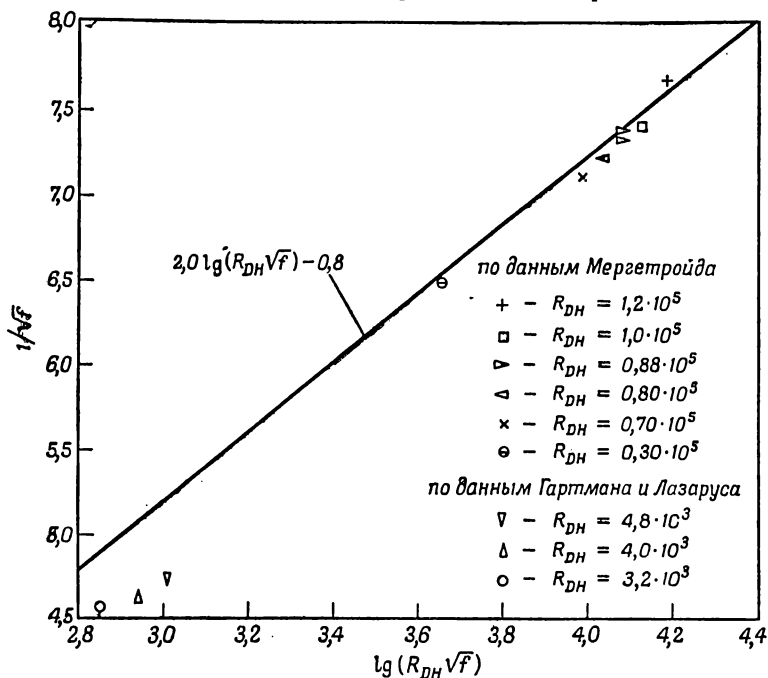
Продолжение табл. 2

№	$R_{DH} \cdot 10^{-3}$	M	$f \cdot 10^3$	$1/\sqrt{f}$	$R^* \cdot 10^{-3}$	$\frac{M}{R_{DH}} \cdot 10^4$	$\frac{M}{R^*} \cdot 10^2$	M^2/R^*
15	4,87	0	44,5	4,74	0,0908	0	0	0
16	4,87	0,79	44,4	4,74	0,0907	1,61	0,87	0,007
17	4,87	1,57	43,9	4,77	0,0902	3,33	1,74	0,027
18	4,87	3,14	40,4	4,97	0,0865	6,66	3,63	0,114
19	4,87	5,11	42,0	4,88	0,0882	10,5	5,79	0,296
20	4,87	6,29	46,9	4,62	0,0932	13,3	6,74	0,424
21	4,87	7,46	50,8	4,44	0,0970	15,3	7,70	0,574

для определения этих размеров, примерно одинакова, относительная ошибка определения размеров для меньшего канала примерно в 10 раз больше, чем для большего. Это различие важно потому, что при расчете коэффициента сопротивления отношение измеренного перепада давления к квадрату измеренного расхода необходимо умножать на величину A^3/P , где A — площадь поперечного сечения, а P — периметр канала. Таким образом, малая относительная ошибка в размерах канала может вызвать сравнительно большую погрешность при определении коэффициента сопротивления. Значения коэффициента сопротивления, полученные по экспериментальным данным Мергетройда, по-видимому, имеют относительную погрешность 2—5%; погрешность результатов, полученных при обработке экспериментальных данных Гартмана и Лазаруса, может достигать примерно 10%.

Для проверки точности результатов Мергетройда можно использовать данные при $M = 0$, т. е. при отсутствии магнитного поля. На фиг. 7 приведены значения коэффициента сопротивления при отсутствии магнитного поля в функции величины $\lg(R_{DH} \sqrt{f})$ по данным Мергетройда. Показанная на фигуре прямая $2 \lg(R_{DH} \sqrt{f}) - 0,80$ получена на основании многочисленных экспериментов Никурадзе с потоками воды в небольших каналах. Хорошее соответствие точек и прямой служит подтверждением данных Мергетройда и теории

турбулентных течений. На фиг. 7 указаны также три точки, полученные по данным Гартмана и Лазаруса при отсутствии магнитного поля. Эти точки не совпадают столь хорошо с кривой Никурадзе, однако расхождение



Фиг. 7. Сравнение данных при отсутствии магнитного поля, полученных Мергетройдом и Гартманом и Лазарусом, с классическими результатами Никурадзе, исследовавшего течения воды в трубах.

находится в пределах определенной выше возможной ошибки.

Ввиду различия оцененной надежности расчетов, основанных на двух сериях экспериментальных данных, в настоящей работе отдается предпочтение результатам Мергетройда. Однако были проведены расчеты и по данным Гартмана и Лазаруса, чтобы показать, что результаты их экспериментов также согласуются с выводами, полученными в данной работе.

Глава VI

СВЯЗЬ ТЕОРИИ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

§ 1. Эмпирическое определение функций F_1 и F_2

Наиболее примечательной особенностью, которая обнаруживается при рассмотрении фиг. 5 и 6, является постоянство коэффициента сопротивления f_c при переходе от ламинарного режима течения к турбулентному. Конечно, значения коэффициента сопротивления при переходе на двух фигурах неодинаковы и составляют около 0,035 на фиг. 5 и 0,044 на фиг. 6. (Такое расхождение характерно для результатов, получаемых при изучении переходного режима на различных участках одной и той же экспериментальной установки. Как у разных экспериментаторов, изучающих одинаковые каналы, так и у одного экспериментатора, изучающего каналы различной формы, результаты, получающиеся для коэффициента сопротивления при переходе, обычно разбросаны в диапазоне $0,025 < f_c < 0,050$ [5]. Разброс, повидимому, объясняется в основном эффектами начального участка и другими посторонними возмущениями.) Однако в пределах каждой отдельной серии экспериментов изменение числа Гартмана (величины магнитного поля) не оказывает заметного влияния на условия перехода, которые характеризуются величиной коэффициента сопротивления. Таким образом, отношение \overline{V}/u^* при переходе не зависит от величины магнитного поля, по крайней мере в диапазоне условий, охваченных этими экспериментами.

Данный результат имеет значение и для турбулентного случая, так как при любом турбулентном течении в канале существует очень тонкий ламинарный подслой вблизи стенок. На краю этого подслоя, который может занимать лишь 0,1% объема канала, имеется область

перехода, где скорость жидкости теряет свой ламинарный характер и принимает стохастические свойства, которые мы связываем с турбулентностью. В обычных гидродинамических течениях эта область перехода начинается около точки, в которой $\bar{u}/\bar{u}^* = 5$, и простирается примерно до точки $\bar{u}/\bar{u}^* = 15$, где становится справедливым логарифмический закон. Так как переход к турбулентному течению на границе ламинарного подслоя должен определяться тем же физическим явлением, что и переход к турбулентному течению для потока в целом, а значение \bar{V}/\bar{u}^* при переходе для потока в целом не зависит от магнитного поля, то следует ожидать, что переход в ламинарном подслое происходит при значениях \bar{u}/\bar{u}^* , также не зависящих от магнитного поля.

Уравнения (4.20), которые определяют влияние приложенного поля на максимальную скорость потока, на дефект и профиль скорости, как и их чисто гидродинамические аналоги, применимы только в области турбулентного ядра. Следует отметить, что функция F_2 не входит в уравнение для дефекта скорости, а в выражении для профиля скорости она дает только аддитивную постоянную, не зависящую от координаты поперек канала. Эта функция характеризует изменение «скорости на стенке» (на границе турбулентного ядра), которое зависит от магнитного поля. Так как она равна нулю при $M = 0$, то соображения, изложенные в предыдущем абзаце, показывают, что для всех значений M мы должны иметь

$$F_2\left(\frac{M}{R^*}\right) = 0. \quad (6.1)$$

Уравнение (6.1) еще не говорит о том, что магнитное поле не влияет на ламинарный подслой и переходные слои. Используя условие равновесия для сил, можно легко показать, что магнитное поле должно вызывать уменьшение градиента скорости в ламинарном подслое. По-видимому, наиболее вероятным воздействием со стороны поля должно быть утолщение ламинарного подслоя, достаточное для того, чтобы компенсировать

снижение градиента и сохранить скорость на границе ламинарного подслоя неизменной.

Отсюда следует вывод, что основное влияние магнитного поля на турбулентное ядро потока должно описываться единственной функцией F_1 . Таким образом, характеристики магнитогидродинамического течения и течения при отсутствии магнитного поля можно будет связать, используя единственный параметр M^2/R^* . Уравнение (4.23) или эквивалентное ему уравнение (4.24) позволяют проверить этот вывод непосредственно по уже имеющимся данным. На фиг. 8 приведена зависимость величины

$$\left[\frac{1}{\sqrt{f}} - \left(\frac{1}{\sqrt{f}} \right)_{M=0} \right]_{R^* = \text{const}} = \frac{R^*}{\sqrt{8} M^2} \int_0^{M^2/R^*} F_1(x) dx \quad (6.2)$$

от M^2/R^* для турбулентного течения; нанесены 34 точки по данным Мергетройда и 10 точек по данным Гартмана и Лазаруса. Эти точки охватывают диапазон значений M^2/R^* , представляющий наибольший практический интерес.

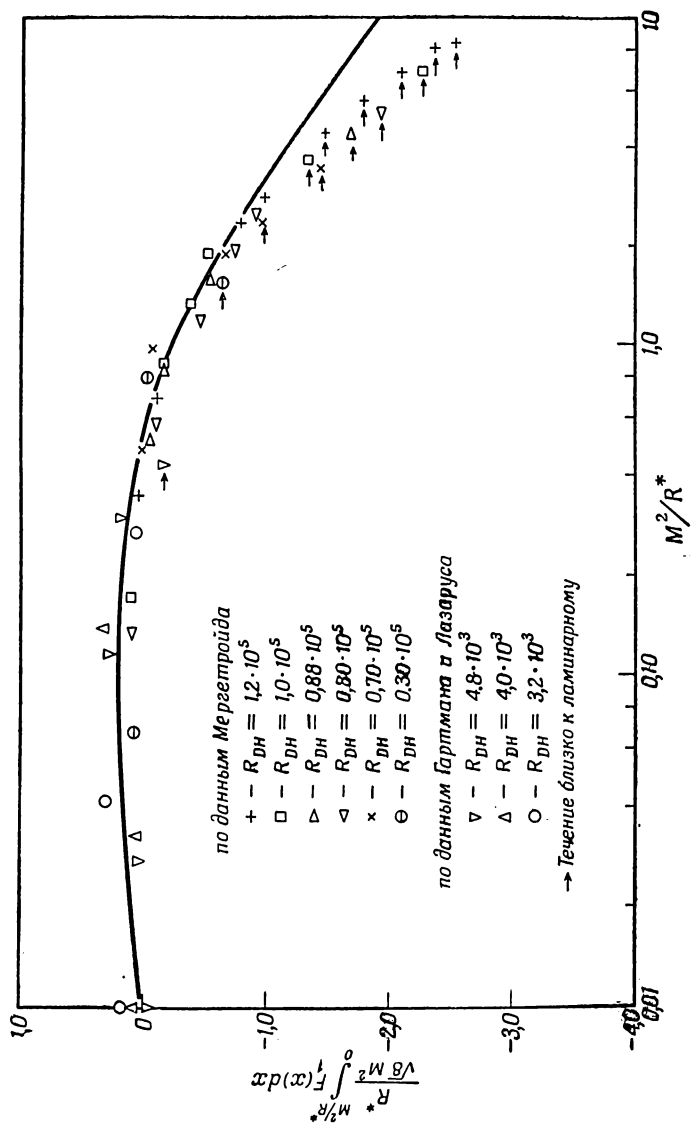
Вследствие разницы между результатами этих двух работ при отсутствии магнитного поля, показанной на фиг. 7, точки на фиг. 8 получались двумя различными способами. Так как результаты Мергетройда при отсутствии поля хорошо описываются выражением

$$\left(\frac{1}{\sqrt{f}} \right)_{M=0} = 2,0 \lg(R_{DH} \sqrt{f}) - 0,8,$$

то точки на фиг. 8, полученные по его данным, рассчитывались по формуле

$$\frac{R^*}{\sqrt{8} M^2} \int_0^{M^2/R^*} F_1(x) dx = \frac{1}{\sqrt{f}} - 2,0 \lg(R_{DH} \sqrt{f}) + 0,8. \quad (6.3)$$

Для того чтобы свести к минимуму влияние на результаты числовых коэффициентов в логарифмическом законе при обработке данных Гартмана и Лазаруса, левую часть формулы (6.2) можно преобразовать в разность, определенную при постоянном значении R_{DH} . Если результаты при отсутствии магнитного поля



Фиг. 8. Корреляция результатов, полученных Мергетройдом и Гартманом и Лазарусом для турбулентного магнитогидродинамического течения.

записать в виде

$$\left(\frac{1}{V\bar{f}}\right)_{M=0} = C_1 \lg(R_{DH} V\bar{f}) + C_2,$$

то

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{V\bar{f}} - \left(\frac{1}{V\bar{f}}\right)_{M=0}\right]_{R^* = \text{const}} &= \\ &= \left[\frac{1}{V\bar{f}} - \left(\frac{1}{V\bar{f}}\right)_{M=0}\right]_{R_{DH} = \text{const}} + C_1 \lg \sqrt{\frac{f_0}{f}}, \quad (6.4) \end{aligned}$$

где через f_0 обозначено значение f при $M = 0$ и заданном значении R_{DH} . Если для расчетов используется формула (6.4), то в нее непосредственно входит только коэффициент C_1 , причем лишь в малый поправочный член. Таким образом, точки на фиг. 8, полученные по данным Гартмана и Лазаруса, были рассчитаны по формуле

$$\begin{aligned} \frac{R^*}{\sqrt[8]{8} M^2} \int_0^{M^2/R^*} F_1(x) dx &= \\ &= \left[\frac{1}{V\bar{f}} - \left(\frac{1}{V\bar{f}}\right)_{M=0}\right]_{R_{DH} = \text{const}} + 2,0 \lg \sqrt{\frac{f_0}{f}}. \quad (6.5) \end{aligned}$$

Анализ фиг. 8 показывает, что нанесенные точки действительно располагаются вблизи одной кривой. Максимальное отклонение точек от проведенной кривой составляет около 0,2, за исключением точек, отмеченных стрелками. Эти отклонения соответствуют ошибкам в исходных данных по коэффициенту сопротивления, составляющим около 6% для данных Мергетройда и около 8,5% для данных Гартмана и Лазаруса. Поскольку эти цифры лежат примерно в пределах допускаемой погрешности, то пригодность такого представления связи характеристик магнитогидродинамического течения и течения при отсутствии магнитного поля можно считать установленной.

Однако представленные результаты определенно зависят от числа Рейнольдса. При возрастании магнитного поля и приближении режима течения к ламинарному рассчитанные точки отклоняются вниз от кривой, проведенной на фиг. 8, и образуют отдельные кривые

для каждого значения числа Рейнольдса. Точки на фиг. 8, отмеченные стрелками, соответствуют течением, настолько близким к ламинарному, что для них коэффициент сопротивления (фиг. 5 и 6) отличается от своего значения при ламинарном режиме при тех же числах Рейнольдса и Гартмана не более чем на 10%. Отмеченные стрелками точки, полученные по данным Мергетройда, соответствуют значениям коэффициента сопротивления, лежащим в пределах $0,025 < f < 0,035$, что близко к переходу, а точки, полученные по данным Гартмана и Лазаруса, точно соответствуют переходному режиму. Таким образом, отклонение этих точек от кривой характеризует ошибки, вызванные принятыми здесь приближениями. Заметим, что точки для меньших чисел Рейнольдса отклоняются от кривой при более низких значениях M^2/R^* .

Эффект, аналогичный отмеченному на фиг. 8, должен ожидаться и из физических соображений. Так как коэффициент вязкости не входит в критерий M^2/R^* , то изменения в течении, обусловленные магнитным полем, могут определяться значением единственного параметра M^2/R^* только в том случае, когда они практически не зависят от вязкости жидкости, т. е. когда течение является сильно развитым турбулентным и пондеромоторные силы всюду уравниваются напряжениями за счет обмена количеством движения и силами давления. В ламинарном течении турбулентные напряжения отсутствуют и картина течения определяется балансом пондеромоторных сил, сил давления и вязких напряжений. Поскольку исходные данные, изображенные на фиг. 5 и 6, не обнаруживают резкой границы между состояниями, которые мы называем ламинарным и турбулентным, постепенное ухудшение соответствия точек и кривой, показанной на фиг. 8, при достижении перехода кажется вполне естественным. Точки, отмеченные стрелками, могут соответствовать условиям, когда ламинарный подслой вырос настолько, что занимает значительную часть канала, и когда турбулентные пульсации в области ядра подавлены, в результате чего остались лишь небольшие переходные области турбулентной активности.

Соответствие точек и кривой для больших значений M^2/R^* на фиг. 8 можно значительно улучшить, несколько изменив кривую. Однако считается, что эта кривая характеризует влияние магнитного поля на течения с сильно развитой турбулентностью, а несовпадение кривой и точек объясняется пренебрежением эффектами вязкости жидкости. К сожалению, данные по развитым турбулентным течениям при значениях M^2/R^* выше 3,0 отсутствуют. Сделанный выбор кривой, которая проведена так, что при больших значениях M^2/R^*

$$\frac{R^*}{\sqrt{8} M^2} \int_0^{M^2/R^*} F_1(x) dx \rightarrow \text{const} - C_1 \lg\left(\frac{M^2}{R^*}\right) - \frac{R^*}{\sqrt{8} M^2}, \quad (6.6)$$

откуда

$$F_1\left(\frac{M^2}{R^*}\right) \rightarrow \text{const} - C_1 \sqrt{8} \lg\left(\frac{M^2}{R^*}\right), \quad (6.7)$$

объясняется рядом причин.

Первая из них основана на уравнении количества движения. Это уравнение было использовано в данном исследовании лишь как вспомогательное при выборе безразмерных параметров, наилучшим образом описывающих течение. Однако окончательные результаты исследования должны удовлетворять условию равновесия сил. Если провести на фиг. 8 кривую при больших значениях M^2/R^* через нанесенные точки, то профили скорости для турбулентного течения, рассчитанные по уравнению (4.20), при больших R^* и M^2/R^* будут иметь М-образную форму, и осредненное значение скорости в центре канала будет меньше средней по сечению скорости и в крайних случаях может стать даже отрицательным. При этом силы вязкости, пондеромоторные силы и силы давления должны были бы способствовать разгону течения в центре канала, а результирующая их, которая может быть в 10—50 раз больше сил давления, должна уравниваться чрезвычайно большими турбулентными напряжениями. Такой результат противоречит существующим представлениям о влиянии магнитного поля на турбулентные пульсации и об относительном направлении сил вязкости и сил, обусловленных обменом количества движения. При использовании кривой, нанесен-

ной на фиг. 8, значение осредненной скорости в центре канала будет превышать среднюю по сечению скорость, а сам профиль осредненной скорости в центре канала при больших M^2/R^* будет стремиться к плоскому.

Вторая причина следует из наблюдений Мергетройда, которые показывают, что все кривые зависимости f от M/R_{DH} для различных значений R_{DH} стремятся слиться в одну кривую при возрастании M и что значение M/R_{DH} , при котором точки для данного R_{DH} начинают ложиться на общую кривую тем меньше, чем больше R_{DH} . На фиг. 5 ясно видно это поведение кривых. Кривые для разных R_{DH} не только достигают линии, соответствующей ламинарному режиму приблизительно при одинаковом значении f , но они стремятся слиться еще в турбулентной области и прийти к точке перехода в виде одной общей кривой. В той области, где f зависит только от M/R_{DH} , величина $1/\sqrt{f}$ однозначно определяется значением M/R^* . Условие слияния, отмеченное Мергетройдом, будет удовлетворено даже при больших числах Рейнольдса, лежащих вне области его экспериментов, если при значениях параметра M^2/R^* , превышающих некоторое критическое минимальное значение $1/\sqrt{f}$, будет зависеть только от M/R^* . Анализ формулы (4.23) (при $F_2 = 0$), однако, показывает, что для этого требуется выполнение при больших значениях M^2/R^* условия (6.6).

Третья причина связана с аналитическим приближением функции F_1 , которое дается в следующей главе. Эта аппроксимация наверняка будет весьма грубой, так как она основана на пренебрежении влиянием вязкости жидкости на изменения картины течения, происходящие в переходной области. Однако точность приближения должна повышаться с ростом M^2/R^* , так как влияние вязкости должно пропорционально уменьшаться. Это приближение также требует выполнения при больших значениях M^2/R^* условия (6.7).

Указанные соображения позволяют установить вид условия (6.7) и, следовательно, первые два члена в правой части выражения (6.6), однако коэффициент при третьем члене остается неопределенным и может

представлять собой произвольное малое число. Выбранный здесь коэффициент $(-1/\sqrt{8})$ определен из условия плавного изменения безразмерной корреляции скорости $\bar{u}'_x \bar{u}'_y / \bar{u}^{*2}$ при изменении M^2/R^* . Вычисления этой корреляции, выполненные в гл. 7, включают оценку интеграла

$$\frac{M^2}{R^*} \int_{\xi}^1 \frac{\bar{u} - \bar{V}}{\bar{u}^*} d\xi,$$

и поэтому при больших значениях M^2/R^* результаты очень чувствительны к ошибкам в \bar{V}/\bar{u}^* или $1/\sqrt{f}$. Как показывают вычисления при

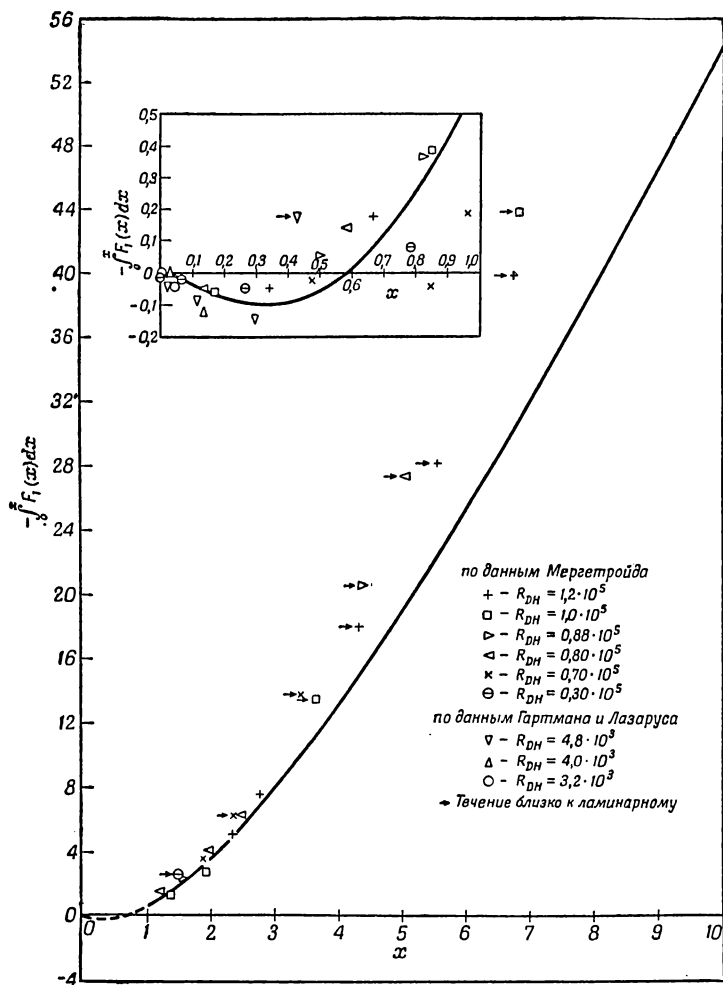
$$\frac{M^2}{R^*} < 1,$$

которые основаны на данных для сильно развитых турбулентных течений, для того, чтобы устранить турбулентные напряжения в значительном объеме в средней части канала, достаточно использовать значения $(M^2/R^*) > 0,5$. Если это положение сохраняется и при $M^2/R^* > 2,0$, то при третьем члене в правой части условия (6.6) должен стоять выбранный коэффициент $(-1/\sqrt{8})$.

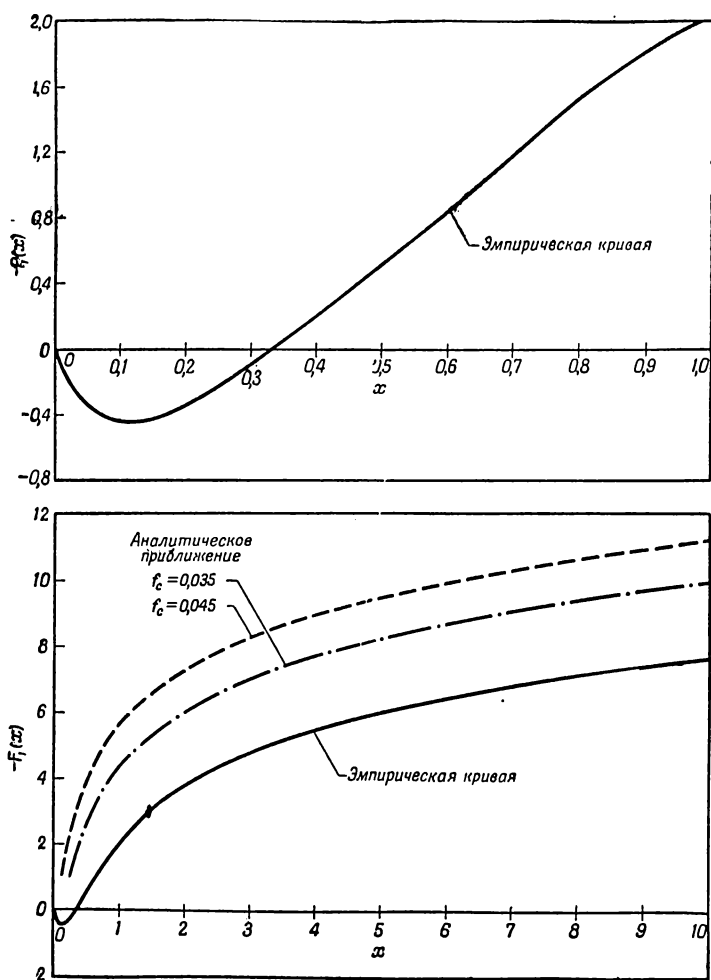
Экспериментальные точки на фиг. 8 в диапазоне $0,6 < (M^2/R^*) < 3,0$ хорошо описываются выражением вида (6.6), если выбрать $C_1 = 2,0$ (что соответствует наклону кривой, построенной на фиг. 7, по данным Мергетройда), а «константу» принять равной 0,135. Поэтому для экстраполяции данных в область высоких значений M^2/R^* , для которых пока нет экспериментальных результатов по сильно развитым турбулентным течениям, используется выражение

$$\begin{aligned} \frac{R^*}{\sqrt{8} M^2} \int_0^{M^2/R^*} F_1(x) dx = \\ = 0,135 - 2 \lg \left(\frac{M^2}{R^*} \right) - \frac{R^*}{\sqrt{8} M^2}, \quad \frac{M^2}{R^*} > 0,6. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Функция F_1 , необходимая для вычисления профиля осредненной скорости, распределения плотности



Фиг. 9. Функция $-\int_0^x F_1(x) dx$, полученная из фиг. 8.



Фиг. 10. Функция $F_1(x)$, полученная из фиг. 8, и аналитические приближения, рассчитанные для двух значений f_c .

электрического тока и первой корреляции скорости, может быть определена следующим образом. С помощью простого пересчета ординаты и абсциссы фиг. 8 строится кривая, показанная на фиг. 9. В результате дифференцирования этой кривой получается искомая «эмпирическая» кривая, представленная на фиг. 10.

§ 2. Аналитическое приближение для функции F_1

Аналитическое приближение для функции F_1 можно получить из условия, что кривые коэффициента сопротивления для турбулентного течения при различных значениях M , которые определяются соотношением (4.23), должны всегда пересекаться с соответствующими кривыми для ламинарного течения при одном и том же значении коэффициента сопротивления f_c . При $F_2 = 0$ выражение (4.23) можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = C_1 \lg(R_{DH} \sqrt{f}) + C_2 + \frac{R_{DH} \sqrt{f}}{32M^2} \int_0^{4\sqrt{8}M^2/R_{DH}\sqrt{f}} F_1(x) dx. \quad (6.9)$$

Так как коэффициент сопротивления при ламинарном течении определяется выражением (5.1), то для такого пересечения необходимо, чтобы в точке перехода значения M и R_{DH} были связаны соотношением

$$f_c = \frac{32}{R_{DH}} \cdot \frac{M^2 \operatorname{th} M}{M - \operatorname{th} M}. \quad (6.10)$$

С помощью соотношения (6.10) можно исключить R_{DH} и f из выражения (6.9). В результате для определения функции $F_1(x)$ получится интегральное уравнение, которое в принципе может быть решено.

Прежде чем приступить к вычислениям, отметим некоторые ошибки, связанные с исходным предположением.

Во-первых, эксперимент указывает на значительное влияние трения в жидкости при режимах течения, близких к переходному; этим влиянием здесь пренебрегается. Во-вторых, поскольку в обычной гидродинамике кривые для коэффициента сопротивления при ламинарном и турбулентном течениях, как правило, при значении коэффициента сопротивления, соответствующем переходу, не пересекаются, то в результате расчета мы неизбежно получим функцию $F_1(x)$, не равную нулю при x , равном нулю. Последний вывод не согласуется с допущениями, использованными при выборе значений коэффициентов C_1 и C_2 . По этой причине здесь мы ограничимся рассмотрением результатов для случая весьма больших магнитных полей.

В области перехода функции от f и R_{DH} , входящие в соотношение (6.9), в соответствии с (6.10) имеют вид

$$R_{DH} \sqrt{f_c} = \frac{32}{\sqrt{f_c}} \frac{M^2 \operatorname{th} M}{M - \operatorname{th} M},$$

$$\frac{R_{DH} \sqrt{f_c}}{32M^2} = \frac{\operatorname{th} M}{\sqrt{f_c} (M - \operatorname{th} M)}$$

и

$$\frac{4\sqrt{8}M^2}{R_{DH}\sqrt{f_c}} = \sqrt{\frac{f_c}{8}} \frac{M - \operatorname{th} M}{\operatorname{th} M}.$$

Таким образом, в области перехода соотношение (6.9) запишется как

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\sqrt{f_c}} - C_2 - C_1 \lg \left(\frac{32}{\sqrt{f_c}} \right) \right] &= C_1 \lg \frac{M^2 \operatorname{th} M}{M - \operatorname{th} M} + \\ &+ \frac{\operatorname{th} M}{\sqrt{f_c} (M - \operatorname{th} M)} \sqrt{\frac{f_c}{8}} \frac{M - \operatorname{th} M}{\operatorname{th} M} \int_0^{\frac{f_c}{8} \frac{M - \operatorname{th} M}{\operatorname{th} M}} F_1(x) dx. \quad (6.11) \end{aligned}$$

Подстановкой

$$r = \frac{M - \operatorname{th} M}{\operatorname{th} M}, \quad M = (r + 1) \operatorname{th} M$$

можно привести выражение (6.11) к виду

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\sqrt{f_c}} - C_2 - C_1 \lg \left(\frac{32}{\sqrt{f_c}} \right) \right] r \sqrt{f_c} = \\ = C_1 r \sqrt{f_c} \lg \left(\frac{M^2}{r} \right) + \int_0^{r \sqrt{\frac{f_c}{8}}} F_1(x) dx. \end{aligned}$$

Дифференцируя последнее выражение по r , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{8}} F_1 \left(r \sqrt{\frac{f_c}{8}} \right) = \left[\frac{1}{\sqrt{f_c}} - C_2 - C_1 \lg \left(\frac{32}{\sqrt{f_c}} \right) \right] - \\ - C_1 \lg \frac{M^2}{r} - C_1 (\lg e) \left(2 \frac{r}{M} \frac{dM}{dr} - 1 \right). \quad (6.12) \end{aligned}$$

Так как M и r связаны трансцендентным уравнением, то решение уравнения (6.12) для $F_1(x)$ весьма сложно, за исключением случая, когда x достаточно велико. Для $M > 2$ имеем

$$\begin{aligned} \text{th } M &\approx 1, \\ M &\approx r + 1, \\ \frac{dM}{dr} &\approx 1, \end{aligned}$$

и из уравнения (6.12) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{8}} F_1(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{f_c}} - C_2 - C_1 \lg \left(\frac{32}{\sqrt{f_c}} \right) \right] - \\ - C_1 \lg \left[\frac{\left(x + \sqrt{\frac{f_c}{8}} \right)^2}{x \sqrt{\frac{f_c}{8}}} \right] - C_1 (\lg e) \left[\frac{x - \sqrt{\frac{f_c}{8}}}{x + \sqrt{\frac{f_c}{8}}} \right], \quad x > \sqrt{\frac{f_c}{8}}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ограничение $x > \sqrt{f_c/8}$ в выражении (6.13) является довольно слабым, и поэтому это выражение можно применять в большинстве случаев, представляющих физический интерес.

На фиг. 10 изображены две кривые, построенные по формуле (6.13) для двух значений f_c , примерно соответствующих двум сериям использованных здесь экспериментальных данных. Ординаты этих кривых отличаются почти на постоянную величину. Такое относительное смещение возникает в основном вследствие разницы в значениях $1/\sqrt{f_c}$ [остальные члены в формуле (6.13) слабо зависят от значения f_c]. Как будет видно из дальнейшего, возникающее из-за наличия магнитного поля искажение скорости, определяемое из аналитического приближения, имеет тот же порядок, что и соответствующая величина, определенная по эмпирической кривой. Форма кривых в общем тоже совпадает. Однако аналитические кривые предсказывают большее искажение профиля средней скорости.

Глава VII

ДАЛЬНЕЙШИЕ ВЫВОДЫ ИЗ ТЕОРИИ

§ 1. Профили скорости и коэффициент сопротивления

В литературе по гидродинамике неоднократно обсуждался вопрос относительно численного значения коэффициентов, которые должны быть использованы в выражении (2.12) для логарифмического профиля скорости и в выражении (2.23) для коэффициента сопротивления. Работа Милликена [11] является одной из попыток решения этой проблемы путем анализа всех имеющихся данных. К сожалению, различные авторы не сходятся во мнениях. Например, Хансейкер и Райтмайер [8], работа которых появилась на восемь лет позже, использовали коэффициенты, отличные от рекомендованных Милликом. В довершение к этому встречающиеся в литературе коэффициенты в выражениях для логарифмического профиля скорости и коэффициента сопротивления обычно не связаны соотношениями вида (2.12) и (2.22). Однако так как эта несогласованность с изложенной в гл. 2 теорией обычно несущественна по сравнению с разницей в значениях, рекомендуемых различными авторами и получаемых по существу из одних и тех же данных, то мы здесь положим в основу наших расчетов следующее выражение для коэффициента сопротивления:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,0 \lg(R_{DH} \sqrt{f}) - 0,8, \quad (7.1)$$

которое находится в хорошем соответствии с данными Мергетройда при отсутствии магнитного поля, а в качестве коэффициентов в выражении для профиля скорости используем значения, рассчитанные из выражения (7.1). Тогда получим

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = 5,657 \lg(R^* \xi) + 6,154. \quad (7.2)$$

Выражения (7.1) и (7.2) применимы, естественно, лишь для обычного гидродинамического течения.

Коэффициент сопротивления и профиль скорости для магнитогидродинамического течения получаются добавлением магнитогидродинамических поправок в выражения (7.1) и (7.2) в соответствии с уравнениями (4.23) и (4.20). Таким образом, при $F_2 \equiv 0$ формула (4.23) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,0 \lg(R_{DH} \sqrt{f}) - 0,8 + \frac{1}{\sqrt{8}} \int_0^1 F_1 \left(\frac{4 \sqrt{8} M^2 \xi}{R_{DH} \sqrt{f}} \right) d\xi,$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,0 \lg R^* + 0,253 + \frac{R^*}{\sqrt{8} M^2} \int_0^{M^2/R^*} F_1(x) dx. \quad (7.3)$$

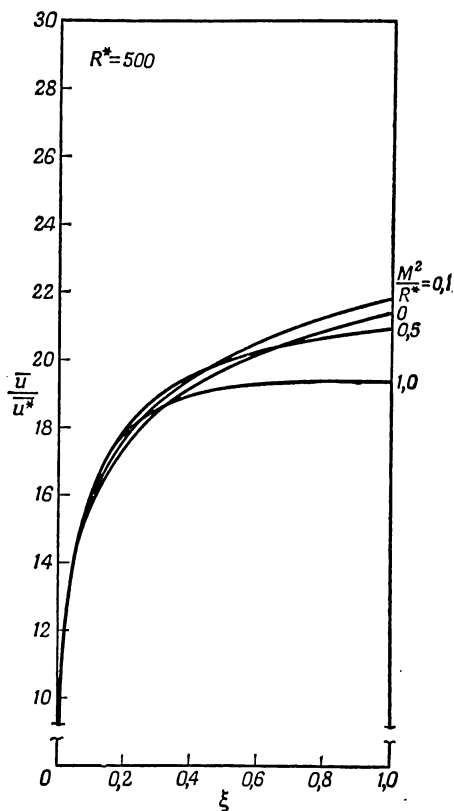
Аналогично, профиль скорости выражается формулой

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = 5,657 \lg(R^* \xi) + 6,154 + F_1 \left(\frac{M^2}{R^*} \xi \right). \quad (7.4)$$

Члены в формулах (7.3) и (7.4), зависящие от F_1 , могут быть определены непосредственно из фиг. 8 и 10.

На фиг. 11—15 нанесены кривые, построенные на основании формул (7.4) для значений R^* , изменяющихся от 500 до 10 000, и значений M^2/R^* от 0 до 8. Первые три из этих фигур соответствуют диапазону чисел Рейнольдса, исследованному Мергетройдом; последние две фигуры относятся к сильно развитым турбулентным течениям при числах Рейнольдса, превышающих достигнутые до сих пор в магнитогидродинамических экспериментах. Эти кривые дают несколько более детальную картину воздействия магнитного поля на течение, чем кривые для коэффициента сопротивления. Для канала данных размеров и данной жидкости величина R^* при турбулентном течении в постоянном магнитном поле определяется приложенным к каналу механическим градиентом давления. Таким образом, каждая из этих фигур показывает изменения в профиле скорости жидкости, обусловленные изменением магнитного поля, при постоянном градиенте давления. На каждой фигуре кривая

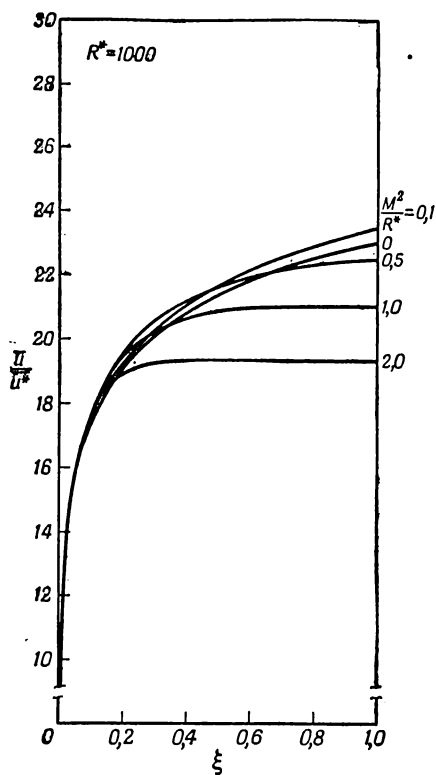
для $M^2/R^* = 0$ соответствует профилю скорости при отсутствии магнитного поля (случай обычного гидродинамического течения). При наложении сравнительно



Ф и г. 11. Профили скорости, рассчитанные для магнитогидродинамического турбулентного течения при $R^* = 500$.

небольшого магнитного поля, такого, что $M^2/R^* \approx 0,1$, подавление турбулентных вихрей приводит к увеличению скорости и градиента скорости во всем потоке и, следовательно, к увеличению расхода. По мере дальнейшего

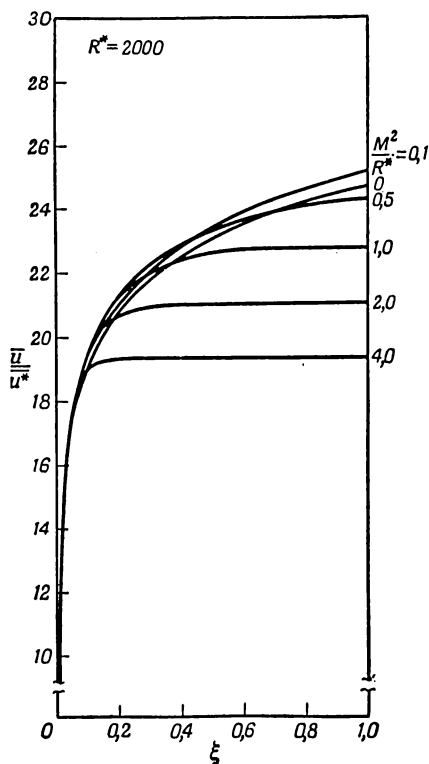
возрастания поля становится значительным взаимодействием между потоком в целом и полем, известное для ламинарных течений, и, хотя скорость жидкости во внешней части канала продолжает возрастать, скорость в



Фиг. 12. Профили скорости, рассчитанные для магнитогидродинамического турбулентного течения при $R^* = 1000$.

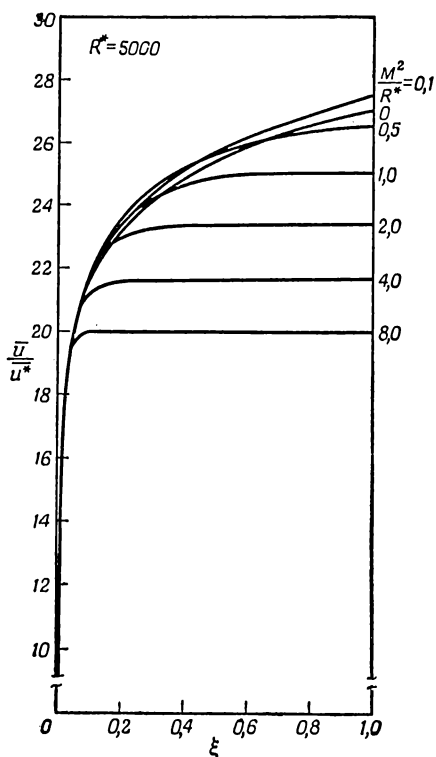
центре канала убывает. При $M^2/R^* = 0,5$ расход возвращается примерно к своему значению при отсутствии поля. Если магнитное поле возрастает еще больше, то скорость жидкости всюду уменьшается, а профиль ско-

рости принимает форму, все более приближающуюся к форме ламинарного профиля, соответствующего тем же значениям M .



Фиг. 13. Профили скорости, рассчитанные для магнитогидродинамического турбулентного течения при $R^* = 2000$.

Так как предыдущие рассуждения применимы лишь для условий течения, достаточно далеких от условий перехода к ламинарному режиму, то надо проверить, не использованы ли эти рассуждения там, где они теряют свою справедливость. Для рассмотренного диапазона чисел Рейнольдса (фиг. 11—15) числа Гартмана при



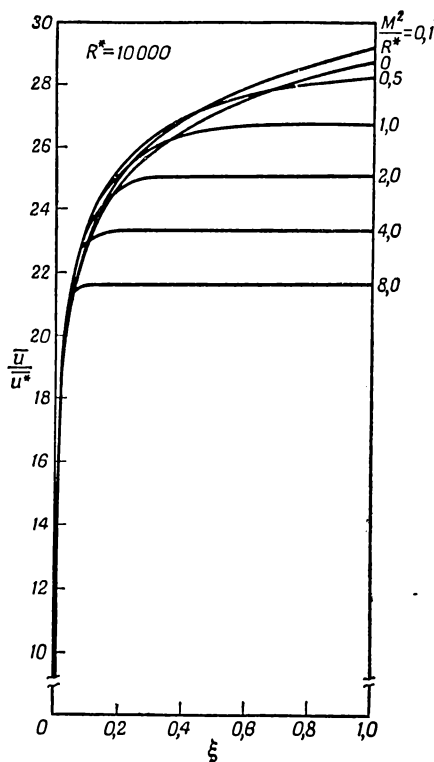
Фиг. 14. Профили скорости, рассчитанные для магнитогидродинамического турбулентного течения при $R^* = 5000$.

переходе велики, и в качестве условия перехода мы можем записать

$$\left(\frac{32M}{R_{DH}}\right)_c = f_c, \quad (7.5)$$

где f_c — значение коэффициента сопротивления при переходе. Поскольку

$$R^* = \sqrt{\frac{f}{8}} \frac{R_{DH}}{4}, \quad (7.6)$$



Ф и г. 15. Профили скорости, рассчитанные для магнитогидродинамического турбулентного течения при $R^* = 10\,000$.

то из выражения (7.5) получаем соотношения

$$\left(\frac{M}{R^*}\right)_c = \sqrt{\frac{f_c}{8}} \quad (7.7)$$

и

$$\left(\frac{M^2}{R^*}\right)_c = \frac{f_c}{8} R^*. \quad (7.8)$$

Таким образом, условия перехода к ламинарному течению могут быть выражены в зависимости от параметров M/R^* и M^2/R^* . При значении коэффициента сопротивле-

ния при переходе $f_c = 0,035$ (определенном из экспериментов Мергетройда) значения M^2/R^* при переходе для фиг. 11—15 будут

Фигура	R^*	$\left(\frac{M^2}{R^*}\right)_c$
11	500	2,2
12	1 000	4,4
13	2 000	8,8
14	5 000	22
15	10 000	44

Хотя многие кривые, показанные на этих фигурах, очень близко напоминают профили скорости при ламинарном течении, все они относятся к течениям, которые мы на основании измерений зависимости перепада давления от расхода считаем «сильно развитыми турбулентными».

При достаточно больших значениях M^2/R^* ($M^2/R^* > 0,6$) относительная скорость в центре канала \bar{U}/\bar{u}^* и коэффициент сопротивления стремятся стать функциями только M/R^* . Подстановка выражения (6.8) в формулу (7.3) дает

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4,0 \lg \left(\frac{R^*}{M} \right) + 0,388 - \frac{R^*}{\sqrt{8} M^2}, \quad \frac{M^2}{R^*} > 0,6. \quad (7.9)$$

Формула (7.9) представляет математически наблюдавшееся в опытах Мергетройда стремление кривых зависимости f от M/R_{DH} слиться в одну кривую при достаточно большой напряженности магнитного поля. Аналитическое выражение для $F_1(M^2/R^*)$, справедливое при $M^2/R^* > 0,6$, можно получить умножением выражения (6.8) на $\sqrt{8} M^2/R^*$ и дифференцированием по M^2/R^* . В результате будем иметь

$$F_1 \left(\frac{M^2}{R^*} \right) = -2,07 - 5,657 \lg \left(\frac{M^2}{R^*} \right), \quad \frac{M^2}{R^*} > 0,6. \quad (7.10)$$

Подстановка выражения (7.10) в формулу (7.4) позволяет определить осредненную скорость в центре канала

$$\frac{\bar{U}}{\bar{u}^*} = 11,31 \lg \left(\frac{R^*}{M} \right) + 4,08, \quad \frac{M^2}{R^*} > 0,6. \quad (7.11)$$

Используя аналогичные рассуждения, можно показать, что в области $(M^2\xi/R^*) > 0,6$ осредненная скорость \bar{u}/\bar{u}^* постоянна.

Выражения (7.9) и (7.11) представляют значительный интерес в связи с тем, что для ламинарного течения при больших M , скажем при $M > 10$, коэффициент сопротивления и максимальная скорость тоже стремятся стать функциями только M/R^* . Для этого случая из формул (5.2) и (7.6) получим

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \approx \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{R^*}{M}. \quad (7.12)$$

При таких значениях M профиль скорости в ламинарном течении является плоским в большей части канала и

$$\frac{\bar{U}}{\bar{u}^*} \approx \frac{\bar{V}}{\bar{u}^*} \approx \frac{R^*}{M}. \quad (7.13)$$

Сравнение формул (7.9) и (7.11) с выражениями (7.12) и (7.13) показывает, что, хотя определяющие переменные в этих двух случаях и одинаковы, функциональные зависимости совершенно различны. В случае ламинарного течения коэффициент трения и безразмерная скорость изменяются в зависимости от M и R^* более быстро. Такой же вывод можно сделать непосредственно из рассмотрения экспериментальных данных, представленных на фиг. 5 и 6.

§ 2. Распределение токов

Приближенное распределение осредненного тока можно определить из закона Ома, записанного в безразмерной форме (3.39). Если пренебречь осредненными токами, возникающими при взаимодействии пульсаций скорости и магнитного поля, то из уравнения (3.39) получим

$$\bar{\mathcal{J}}_z = \bar{\mathcal{U}}_x - \langle \bar{\mathcal{U}}_x \rangle,$$

поскольку для нашего случая, когда рассматриваемый канал работает в режиме демпфера, осредненный по объему ток должен быть равен нулю. Записав это выражение через основные физические переменные, будем

иметь

$$\frac{\bar{J}_z}{\sigma \bar{u}^* B_0} = \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}^*} - \frac{\bar{V}}{\bar{u}^*}. \quad (7.14)$$

Используя выражение для профиля скорости (7.4), получаем

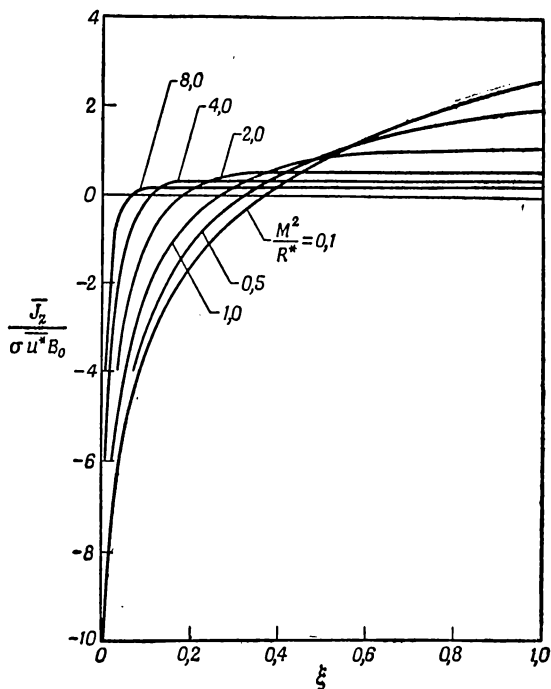
$$\frac{\bar{J}_z}{\sigma \bar{u}^* B_0} = 5,657 \lg \xi + 2,45 + F_1 \left(\frac{M^2 \xi}{R^*} \right) - \frac{R^*}{M^2} \int_0^{M^2/R^*} F_1(x) dx. \quad (7.15)$$

Распределение токов (7.15) можно рассчитать при помощи графиков, приведенных на фиг. 8 и 10. На фиг. 16 изображена зависимость $\bar{J}_z/\sigma \bar{u}^* B_0$ от ξ для ряда значений M^2/R^* . Кривые на этой фигуре показывают, что циркулирующие токи являются положительными в центре канала и отрицательными у стенок. Таким образом, магнитогидродинамические силы, обусловленные взаимодействием этих токов с приложенным магнитным полем, стремятся затормозить поток в центре и разогнать его во внешней части канала точно так же, как и в соответствующем ламинарном течении. При $M^2/R^* > 0,6$ в центре канала имеется область, где плотность тока постоянна. Величину этой плотности тока можно определить из уравнений (6.8), (7.10) и (7.15):

$$\left(\frac{\bar{J}_z}{\sigma \bar{u}^* B_0} \right)_{\xi=1} = \frac{R^*}{M^2}, \quad \frac{M^2}{R^*} > 0,6. \quad (7.16)$$

Уравнение (7.16) справедливо также для ламинарного магнитогидродинамического течения при $M > 10$; следовательно, при достаточно больших магнитных полях, независимо от того, является ли течение в целом ламинарным или турбулентным, силовое равновесие в центральной части канала достигается уравниванием сил давления и электромагнитных сил, а роль вязких и турбулентных напряжений в общем балансе незначительна. Таким образом, в турбулентных магнитогидродинамических течениях при высоких значениях M^2/R^* наряду с ламинарным подслоем на стенках имеется центральная область, где течение по существу является ламинарным.

Распределение токов в канале, работающем в режиме индукционного насоса или магнитогидродинамического генератора, можно легко получить из фиг. 16 путем



Фиг. 16. Профили осредненной плотности тока, рассчитанные для турбулентного магнитогидродинамического течения в канале, работающем в режиме демфера.

сдвига кривых по вертикали на величину $\langle \bar{J}_z \rangle / \sigma \bar{u}^* B_0$, которая больше нуля для генераторов и меньше нуля для насосов.

§ 3. Корреляции скорости

Приближенное выражение для корреляции между пульсациями скорости можно получить из соотношений (3.296), (3.34) и (3.35). Пренебрегая в этих соотноше-

ниях корреляциями между пульсациями поля и корреляциями между пульсациями поля и скорости, будем иметь

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{\overline{u'_x u'_y}}{\overline{u'^2}} \right) = 1 - \frac{M^2}{R^*} \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}^*} - \frac{\bar{V}}{\bar{u}^*} \right) + \frac{1}{R^*} \frac{d^2 \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}^*} \right)}{d\eta^2}.$$

Так как корреляция скорости должна быть нечетной функцией \mathcal{U} , а градиент скорости в центре канала должен быть равен нулю, можно проинтегрировать это выражение и, используя (2.7), получить

$$\frac{\overline{u'_x u'_y}}{\overline{u'^2}} = (1 - \xi) - \frac{M^2}{R^*} \int_{\xi}^1 \frac{\bar{u} - \bar{V}}{\bar{u}^*} d\xi - \frac{1}{R^*} \frac{d \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}^*} \right)}{d\xi}. \quad (7.17)$$

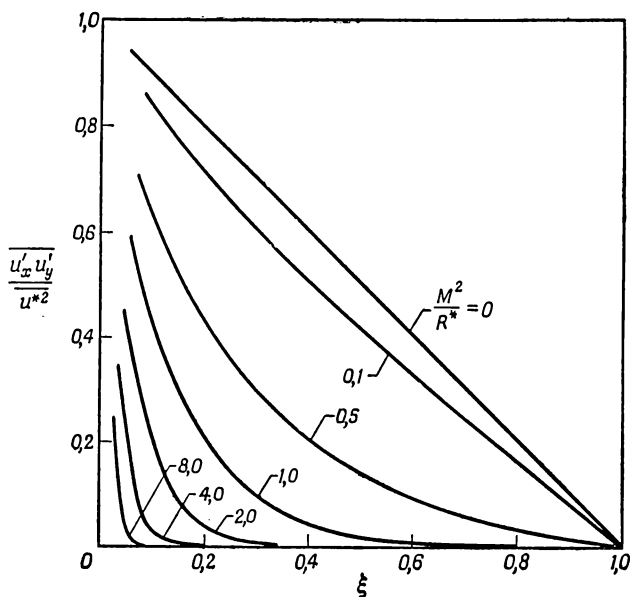
Преобразуя второй член правой части выражения (7.17) с помощью (7.4), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\overline{u'_x u'_y}}{\overline{u'^2}} = & (1 - \xi) + 5,657 \frac{M^2 \xi}{R^*} \lg \xi + \\ & + \int_0^{M^2 \xi / R^*} F_1(x) dx - \xi \int_0^{M^2 / R^*} F_1(x) dx - \frac{1}{R^*} \frac{d(\bar{u} / \bar{u}^*)}{d\xi}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Первые два члена в правой части можно легко вычислить, два следующих члена можно получить из фиг. 9. Последний член, который представляет вязкие касательные напряжения, можно определить из выражения для профиля скорости (7.4) (хотя это выражение и не удовлетворяет вытекающему из требований симметрии условию равенства нулю градиента скорости на оси канала); однако мы этим членом будем пренебрегать, так как он ничтожно мал всюду, за исключением малых областей вблизи стенок. Таким образом, в большей части канала

$$\begin{aligned} \frac{\overline{u'_x u'_y}}{\overline{u'^2}} = & (1 - \xi) + 5,657 \frac{M^2 \xi}{R^*} \lg \xi + \\ & + \int_0^{M^2 \xi / R^*} F_1(x) dx - \xi \int_0^{M^2 / R^*} F_1(x) dx. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Кривые корреляции скоростей, определяемые соотношением (7.19), изображены на фиг. 17 для ряда значений M^2/R^* . При $M^2/R^* = 0$, т. е. в обычном гидродинамическом течении, безразмерная корреляция скорости будет изображаться в большей части канала прямой линией



Фиг. 17. Корреляции скорости (турбулентные касательные напряжения), рассчитанные для турбулентного магнитогидродинамического течения в канале.

с наклоном минус единица. В непосредственной близости стенок вязкие напряжения, которыми мы пренебрегали, будут уменьшать корреляцию до нуля. При наложении магнитного поля корреляция всюду уменьшается и, когда $M^2/R^* = 1$, она по существу равна нулю в средней половине канала. Из выражений (6.8) и (7.19) следует, что

$$\frac{\overline{u'_x u'_y}}{u'^2} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{M^2 \xi}{R^*} > 0,6.$$

Этот результат указывает на то, что турбулентные пульсации исчезают в центральной части канала даже при умеренных значениях M^2/R^* , поскольку представляется маловероятным, чтобы магнитное поле только уменьшало коэффициент корреляции между пульсациями скорости. По мере возрастания параметра M^2/R^* область течения, свободная от пульсаций, увеличивается, а амплитуда корреляции скоростей при данном значении ξ продолжает уменьшаться. Однако там, где пульсации не равны нулю, наклон кривой корреляции, который определяет силу на единицу объема, обусловленную турбулентными напряжениями, становится очень большим. Таким образом, при больших значениях M^2/R^* в турбулентном магнитогидродинамическом течении появляются три по существу ламинарные области: два подслоя на стенках канала и «турбулентное ядро», отделенное двумя переходными областями, напоминающими турбулентные вихревые дорожки.

Результаты, изложенные в этом и в предыдущем параграфах, связаны с допущениями:

$$\overline{u'_x v'_y} - \overline{v'_x u'_y} \ll \overline{u'_x} \quad (7.20)$$

и

$$R_H \overline{v'_x v'_y} = \frac{M^2}{R^* R_V} \overline{v'_x v'_y} \ll \overline{u'_x u'_y}. \quad (7.21)$$

Хотя оправданность этих допущений, по-видимому, на этот раз подтверждается правдоподобностью и логичностью полученных результатов, тем не менее можно дать оценку порядков величин, входящих в эти неравенства. Безразмерная осредненная скорость обычно бывает порядка 20—30, как это видно из фиг. 11—15. Таким образом,

$$6(\overline{u'_x}) \approx 20.$$

Измерения Лауфера [9] показали, что безразмерные среднеквадратичные пульсации скорости в обычных гидродинамических течениях имеют порядок единицы. В магнитогидродинамических течениях они, конечно, будут меньше, и мы можем записать

$$6(u') < 1.$$

Выражение (3.7) показывает, что основной вклад в безразмерные пульсации магнитного поля дает взаимодействие между безразмерными пульсациями скорости и безразмерным осредненным полем. Это поле по порядку своей величины равно единице. Левая часть выражения (3.7) представляет индукционный эффект, который в соответствии с правилом Ленца всегда стремится уменьшить пульсации магнитного поля. Если пренебречь этим эффектом, то процесс генерации пульсаций поля, по-видимому, можно оценить умножением пульсаций скорости на R_V и интегрированием по всему пространству. Хотя при интегрировании пульсации также сглаживаются, мы для осторожности запишем

$$G(\mathcal{B}') < R_V G(\mathcal{U}').$$

Таким образом, условия (7.20) и (7.21) будут наверняка выполняться, если

$$R_V \ll 20 \quad \text{и} \quad \frac{M^2 R_V}{R^*} \ll 1.$$

Второе требование более строгое. Однако в инженерных приложениях даже оно всегда выполняется. Наибольшая величина этого параметра, который можно записать как

$$\frac{M^2 R_V}{R^*} = \frac{\mu_0 \sigma^2 B_0^2 L^2}{\rho},$$

в экспериментах Мергетройда, проводившихся на ртути, доходила до $2 \cdot 10^{-3}$. Намного большие значения, вплоть до 0,1 или 0,2, могут быть получены в течениях жидкого натрия.

Глава VIII

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИЗ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В БЕГУЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

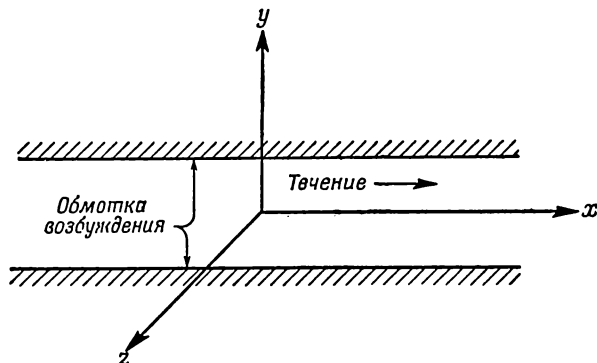
§ 1. Постановка задачи

На фиг. 18 представлена физическая модель, используемая здесь в качестве идеализации течения в бегущем магнитном поле. Как и ранее, канал представляет собой пространство между двумя бесконечными параллельными плоскостями $y = \pm L$. Предполагается, что течение ламинарное и направлено вдоль оси x . Перекачиваемая жидкость характеризуется плотностью ρ , коэффициентом вязкости η , электропроводностью σ и магнитной проницаемостью вакуума μ_0 . Область вне канала занята слоями идеализированного металла, имеющего нулевую проводимость и бесконечно большую магнитную проницаемость. Электрическое возбуждение обеспечивается бегущим током на каждой из плоскостей $y = \pm L$ (ток течет в направлении оси z). Будем характеризовать бегущий ток суммарным током на длине полуволны l (в амперах), частотой ω и волновым числом k . Таким образом, ток возбуждения для каждой волны будет:

$$\frac{kI}{2} \operatorname{Re} [e^{j(\omega t - kx)}] \quad (\text{ампер на единицу длины}).$$

Математическое описание задачи, как и ранее, включает основные уравнения магнитной гидродинамики и соответствующие граничные условия. Однако наличие в этих уравнениях нелинейных членов, выражающих перенос количества движения, электромагнитные силы и индуцированные поля, настолько усложняет анализ, что точное решение до сих пор не найдено. Поэтому настоящая глава посвящается главным образом приближенному определению характеристик осредненного течения. При сделанных предположениях получается решение,

которое является наиболее полезным в тех случаях, когда магнитные поля очень велики и когда частота скольжения в системе координат, движущейся вместе с жидкостью, достаточно мала, чтобы скин-эффектом



Ф и г. 18. Схема течения в бегущем магнитном поле.

можно было пренебречь, но в то же время достаточно велика, чтобы инерция жидкости оказывала гасящее действие на пульсирующие составляющие электромагнитных сил.

§ 2. Граничные условия и условия симметрии

Свойства симметрии для данного течения такие же, что и для турбулентного течения в постоянном магнитном поле, свойства которого рассматривались в гл. III. Вследствие того, что канал образован двумя параллельными плоскостями, все параметры течения не будут зависеть от z . Можно сохранить без изменения классификацию параметров течения в зависимости от их четности или нечетности по отношению к координате y , обоснование которой было дано в гл. III. Магнитогидродинамическое взаимодействие в турбулентном течении в постоянном магнитном поле вызывалось наложением магнитного поля в направлении оси y . В данном случае оно обусловлено током в направлении оси z . Так как оси y и z при преобразованиях осей, рассматривавшихся в

гл. III, ведут себя одинаково, то окончательные выводы остаются без изменений и классификация, которая была дана в табл. 1, тоже может быть сохранена.

Граничные условия для скорости жидкости определяются наличием конечной вязкости:

$$u = 0, \quad y = \pm L. \quad (8.1)$$

Значение компоненты B_x магнитной индукции на стенке канала определяется условием скачка поля на токовых поверхностях и принятым бесконечным значением магнитной проницаемости в пространстве вне канала:

$$B_x = \pm \frac{\mu_0 k I}{2} \operatorname{Re} [e^{j(\omega t - kx)}], \quad y = \pm L. \quad (8.2)$$

Вне канала $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ и $\operatorname{div} \mathbf{B}$ должны быть равны нулю, а компонента магнитной индукции B_z должна быть по крайней мере постоянной. Если потребовать равенства нулю всех полей на больших расстояниях от канала, то

$$B_z = 0, \quad |y| > L, \quad (8.3)$$

и поскольку компонента B_z должна быть непрерывна на стенках канала, то она будет равна нулю всюду. В этом случае будут отличны от нуля лишь z -компоненты векторов плотностей тока и напряженности электрического поля.

§ 3. Основные уравнения течения в бегущем магнитном поле

Здесь мы будем использовать безразмерную запись уравнений магнитной гидродинамики в виде (3.2)—(3.5) и (3.31), где в качестве нормирующих величин выберем полуширину канала, фазовую скорость бегущей волны электрического возбуждения и среднеквадратичное значение магнитной индукции, которое было бы в канале при отсутствии токов проводимости в жидкой среде. Таким образом,

$$\begin{aligned} L_0 &\equiv L, \\ U_0 &\equiv \frac{\omega}{k}, \\ B_0 &\equiv \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}L}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Так как электрическое возбуждение состоит из токов, образующих бегущую волну, следует ожидать, что основные составляющие магнитной индукции, плотности тока и электрического поля тоже будут бегущими волнами с той же частотой и длиной волны. Анализ уравнений (3.2) показывает, что такие волны были бы точным решением данной задачи, если бы скорость жидкости U не зависела от \mathcal{X} и τ . Наличие такой зависимости сильно усложняет математическое решение задачи о течении жидкости в бегущем магнитном поле, так как оно обуславливает появление высших гармоник плотности тока и, следовательно, высших гармоник магнитной индукции, напряженности электрического поля и электромагнитных сил. Чтобы преодолеть эту трудность, будем представлять скорость в каждой точке в виде суммы осредненного по времени значения $\bar{U}(\mathcal{Y})$ и отклонения от среднего $U'(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \tau)$:

$$U = \bar{U}(\mathcal{Y}) + U'(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \tau) \quad (8.5)$$

и, предполагая отклонение малым по сравнению со средним значением, пренебрегать токами, индуцированными такими малыми отклонениями скорости. Таким образом, уравнение (3.2г) можно записать приближенно в виде

$$\mathbf{J} = \mathbf{E} + \bar{\mathbf{U}} \times \mathbf{B}. \quad (8.6)$$

Выражение для осредненной скорости $\bar{\mathbf{U}}$ можно получить путем осреднения по времени уравнения (3.2е). При таком осреднении, когда по существу необходим лишь баланс в среднем между различными напряжениями, действующими в жидкости, вводятся конвективные касательные напряжения, компоненты которых равны частным производным от осредненных произведений пульсационных компонент скорости. Если этими напряжениями пренебречь, то уравнение (3.2е) примет вид

$$\mathcal{D}\bar{\varphi} = \frac{\mathcal{D}^2\bar{U}}{R_e} - \frac{M^2}{R_e} (\bar{\mathbf{J}} \times \bar{\mathbf{B}}). \quad (8.7)$$

Оценка погрешности, обусловленной допущениями, которые использованы при получении выражений (8.6) и (8.7), весьма затруднительна. Вообще говоря, можно

ожидать, что эти допущения обеспечивают наибольшую точность, когда число Гартмана велико (что соответствует почти плоскому профилю скорости) и когда частота скольжения достаточно велика, чтобы инерция жидкости служила эффективным «фильтром» гармонических составляющих электромагнитных сил. Как мы увидим далее, влияние числа Гартмана на течение в бегущем магнитном поле такое же, как и на течение в постоянном магнитном поле; при значениях M порядка 5—10 получаются эпюры скоростей, очень близкие к плоским. Гасящее влияние инерции жидкости зависит от механических «постоянных времени» течения. Если конвективные касательные напряжения отсутствуют, то механические постоянные времени изменяются пропорционально $\sqrt{R_e}$, причем максимальное значение составляет несколько десятков или сотен периодов электрического возбуждения. Из опытов с турбулентным течением мы знаем, однако, что наличие конвективных напряжений приводит к резким отклонениям от этих оценок. Возможно, лучшим подтверждением того, что конвективными напряжениями при ламинарном течении можно пренебречь, является эксперимент. Он показывает, что течения, для которых конвективные напряжения дают заметный вклад в общий баланс сил, стремятся стать скорее неустойчивыми, турбулентными, чем ламинарными. Оценка ошибок, связанных с этими допущениями, для случая очень малых частот скольжения будет дана в следующем параграфе.

Безразмерный вид множителя, определяющего бегущую волну, есть

$$e^{j(\omega t - kx)} = e^{jkL(\tau - \mathcal{X})}. \quad (8.8)$$

Таким образом, электромагнитные безразмерные величины можно взять в виде

$$\begin{aligned} E &= \text{Re} \{ \mathbf{e}(\mathcal{Y}) \exp [jkL(\tau - \mathcal{X})] \}, \\ B &= \text{Re} \{ \mathbf{b}(\mathcal{Y}) \exp [jkL(\tau - \mathcal{X})] \}, \\ J &= \text{Re} \{ \mathbf{i}(\mathcal{Y}) \exp [jkL(\tau - \mathcal{X})] \}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

где комплексные векторы \mathbf{e} , \mathbf{b} и \mathbf{i} вследствие симметрии могут зависеть только от \mathcal{Y} . Дифференцируя выражения

(8.9), получаем

$$\mathbf{D} \times \mathbf{E} = \operatorname{Re} \{ [\mathbf{D} \times \mathbf{e} + \mathbf{e} \times jkL\mathbf{x}] e^{jkL(\tau - \mathbf{x})} \},$$

$$\mathbf{D} \times \mathbf{B} = \operatorname{Re} \{ [\mathbf{D} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times jkL\mathbf{x}] e^{jkL(\tau - \mathbf{x})} \},$$

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} = \operatorname{Re} \{ [\mathbf{D} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot jkL\mathbf{x}] e^{jkL(\tau - \mathbf{x})} \},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} = \operatorname{Re} \{ jkL\mathbf{b} e^{jkL(\tau - \mathbf{x})} \},$$

где \mathbf{x} — единичный вектор в направлении \mathcal{X} . В этом случае закон Фарадея принимает вид

$$\mathbf{D} \times \mathbf{e} + jkL(\mathbf{e} \times \mathbf{x}) = -jkL\mathbf{b}; \quad (8.10)$$

закон Ампера —

$$\mathbf{D} \times \mathbf{b} + jkL(\mathbf{b} \times \mathbf{x}) = R_V \mathbf{i}; \quad (8.11)$$

закон Ома —

$$\mathbf{i} = \mathbf{e} + \bar{\mathbf{U}} \times \mathbf{b}; \quad (8.12)$$

условие непрерывности линий магнитной индукции

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{b} - jkL(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) = 0. \quad (8.13)$$

Так как \mathbf{b} имеет только компоненты $b_y(\mathcal{Y})$ и $b_x(\mathcal{Y})$, а $\bar{\mathbf{U}}$ — единственную компоненту $\bar{\mathcal{U}}_x(\mathcal{Y})$, то векторы $\mathbf{e}(\mathcal{Y})$ и $\mathbf{i}(\mathcal{Y})$ должны иметь единственную не нулевую компоненту вдоль оси z . Поэтому из уравнения (8.10) следует два соотношения:

$$\frac{de_z}{d\mathcal{Y}} = -jkLb_x \quad (8.14)$$

и

$$e_z = -b_y. \quad (8.15)$$

Уравнения (8.11) и (8.12) совместно с выражением (8.15) дают

$$\frac{db_x}{d\mathcal{Y}} + jkLb_y = -R_V i_z \quad (8.16)$$

и

$$i_z = -(1 - \bar{\mathcal{U}}_x) b_y. \quad (8.17)$$

Уравнение (8.13) не дает никаких дополнительных сведений,

Используя выражения (8.9) и (8.17), можно определить x -компоненту электромагнитной силы на единицу объема

$$(\overline{\mathbf{J} \times \mathbf{B}})_x = (1 - \bar{u}_x) \frac{b_y b_y^c}{2}, \quad (8.18)$$

где индекс c обозначает комплексно сопряженную величину. Таким образом, проектируя уравнение баланса осредненных сил (8.7) на ось x , получаем

$$R_e \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} = \frac{d^2 \bar{u}_x}{d\eta^2} + M^2 (1 - \bar{u}_x) \frac{b_y b_y^c}{2}. \quad (8.19)$$

Для качественного анализа полезны еще два соотношения. Исключая i_z , b_x и e_z из выражений (8.14) — (8.17), будем иметь

$$\frac{d^2 b_y}{d\eta^2} - [(kL)^2 + jkLR_V (1 - \bar{u}_x)] b_y = 0. \quad (8.20)$$

Аналогичные преобразования для b_x приводят к выражению

$$\frac{d^2 b_x}{d\eta^2} - [(kL)^2 + jkLR_V (1 - \bar{u}_x)] b_x = -R_V b_y \frac{d\bar{u}_x}{d\eta}. \quad (8.21)$$

Появление скорости и градиента скорости отдельно в выражениях (8.20) и (8.21) связано с существованием двух различных физических явлений, обусловленных движением жидкости. Величина $(1 - \bar{u}_x)$ есть локальное значение осредненного скольжения (разность скоростей волны и жидкости, выраженная в долях скорости волны), которое играет очень важную роль в обычных индукционных машинах. Таким образом, появление \bar{u}_x в левых частях выражений (8.20) и (8.21) связано с доплеровским изменением видимой частоты возбуждения для наблюдателя, движущегося вместе с жидкостью. В насосах $\bar{u}_x < 1$, и непосредственное влияние движения жидкости на электромагнитное поле состоит в уменьшении скин-эффекта. Член, содержащий градиент скорости в правой части выражения (8.21), возникает за счет циркулирующих токов, индуцированных в поперечном сечении канала в результате взаимодействия поперечного

магнитного поля и потока с неоднородным профилем скорости. Последний эффект непосредственно не связан с частотой возбуждения и по существу аналогичен эффекту, вызывающему искажение магнитного поля и сглаживание профиля скорости при ламинарном течении в постоянном магнитном поле.

Упомянутые явления определяют условия, необходимые для эффективного воздействия бегущего поля на течение. Если имеется сильно выраженный скин-эффект, то магнитное поле и электрические токи сосредотачиваются во внешних частях канала и вклад, который дает соответствующее распределение электромагнитных сил в разгон жидкости, невелик. В предельном случае очень сильного скин-эффекта, т. е. при высокой частоте возбуждения и (или) короткой длине волны возбуждения, все электромагнитные силы сосредотачиваются в тонких слоях у стенок канала, и течение определяется почти полностью механическим градиентом давления.

Технические устройства, в которых используются течения в бегущем магнитном поле, обычно конструируются так, что скин-эффект пренебрежимо мал, а y -компонента магнитного поля по существу постоянна поперек канала. Выражение (8.20) показывает, что в центральной области канала, где \bar{u}_x остается почти постоянной, y -компонента магнитного поля меняется как $\text{ch}(\alpha y)$, где

$$\alpha^2 \equiv (kL)^2 + jkLR_V(1 - \bar{u}_x).$$

Таким образом, если выполняется неравенство

$$|(kL)^2 + jkLR_V| \ll 1,$$

то b_y в поперечном сечении канала почти не изменяется. Для значений $|\alpha| < 0,5$ максимальная разница амплитуд магнитного поля в центре канала и на границе составляет около 10%.

§ 4. Приближенное решение

Поскольку для течения в бегущем магнитном поле, как и для соответствующего течения в постоянном магнитном поле, градиент давления $\partial \bar{p} / \partial x$ должен быть постоянным, решение уравнения (8.19), удовлетворяю-

щее однородным граничным условиям, при постоянном b_y будет иметь вид

$$\bar{u}_x = \left[1 - \frac{R_e}{(\beta M)^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \mathcal{X}} \right] \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \beta M \mathcal{Y}}{\operatorname{ch} \beta M} \right], \quad (8.22)$$

где

$$\beta^2 = \frac{b_y b_y^c}{2}. \quad (8.23)$$

Выражение (8.22) по форме почти тождественно решению Гартмана для профиля скорости при ламинарном течении в постоянном магнитном поле. При работе канала в режиме насоса первый множитель в скобках в правой части выражения (8.22) должен быть больше нуля.

Магнитное поле может быть оценено из выражения (8.16). Интегрируя это уравнение по \mathcal{Y} в пределах от 0 до 1, получаем

$$b_x(1) = (-jkL + R_V S) b_y, \quad (8.24)$$

где S — скольжение, осредненное по поперечному сечению,

$$S = \int_0^1 (1 - \bar{u}_x) d\mathcal{Y}. \quad (8.25)$$

Если граничное условие (8.2) записать в безразмерном виде

$$b_x(1) = \sqrt{2} kL,$$

то из выражения (8.24)

$$b_y = \frac{\sqrt{2}}{-j + \left(\frac{R_V S}{kL} \right)} \quad (8.26)$$

(b_y — комплексная амплитуда поперечного поля). Тогда величина β определится из соотношения

$$\beta^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{R_V S}{kL} \right)^2}. \quad (8.27)$$

Формулы (8.26) и (8.27) определяют b_y и β как функции среднего скольжения. Выражение для самого скольжения можно получить интегрированием уравнения (8.22) по y в пределах от 0 до 1; в результате будем иметь

$$S = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{R_V S}{kL}\right)^2}}{M} \operatorname{th} \frac{M}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_V S}{kL}\right)^2}} + \\ + \frac{R_e \left[1 + \left(\frac{R_V S}{kL}\right)^2\right]}{M^2} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \times \\ \times \left[1 - \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{R_V S}{kL}\right)^2}}{M} \operatorname{th} \frac{M}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_V S}{kL}\right)^2}} \right]. \quad (8.28)$$

Таким образом, среднее скольжение есть, вообще говоря, довольно сложная функция параметров M , $R_e(\partial \bar{\varphi} / \partial x)$ и R_V/kL . В наиболее интересном с физической точки зрения случае, когда M велико, выражение (8.28) сильно упрощается и принимает вид

$$S \approx \frac{R_e}{M^2} \left[1 + \left(\frac{R_V S}{kL}\right)^2\right] \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \quad M \gg 1 \quad (8.29)$$

(при условии, что отношение $R_V S/kL$ не слишком велико), т. е. скольжение становится пропорциональным механическому градиенту давления.

Теперь мы можем вернуться к выражению (8.16) и, проинтегрировав его, определить изменение b_x по поперечному сечению канала. Полученный таким образом результат слишком сложен, чтобы его можно было эффективно использовать; исключение составляет предельный случай больших значений M . Здесь

$$b_x \approx \sqrt{2} kL y, \quad M \gg 1 \quad (8.30)$$

опять при условии, что значения $R_V S/kL$ не слишком велики.

Полученное решение, очевидно, не удовлетворяет условию равенства нулю дивергенции B , однако это не-

соответствие невелико, так как с учетом порядка величин

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_y &\approx 1, \\ \mathcal{R}_x &\approx kL, \\ \frac{\partial \mathcal{R}_x}{\partial \mathcal{X}} &\approx (kL)^2,\end{aligned}$$

и изменение b_y , необходимое для того, чтобы иметь $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, будет такого порядка малости, что им можно пренебречь, предположив, что b_y постоянно.

Распределение плотности тока и напряженности электрического поля можно легко определить, используя уравнения (8.15) и (8.17). Напряженность электрического поля по сечению постоянна, а плотность тока изменяется пропорционально местному значению скольжения. В каждом поперечном сечении канала существует циркулирующий ток и суммарный ток, плотность которого зависит от среднего скольжения и координаты \mathcal{X} . Таким образом, токи циркулируют в плоскостях $\mathcal{X} = \text{const}$ и $\mathcal{Y} = \text{const}$ и в установке конечных размеров концы канала $\mathcal{Z} = \text{const}$ должны быть сделаны из хороших проводников, чтобы они могли работать в качестве «концевых колец».

Положив параметр α^2 достаточно малым, мы избавились от необходимости расчета зависимости характеристик течения от модуля этого параметра. Тем не менее наши результаты зависят от аргумента α^2 , так как величина $R_V S / kL$, которая, по-видимому, аналогична отношению реактивного сопротивления к активному в обычных индукционных двигателях, по существу представляет собой среднее отношение мнимой и действительной частей α^2 . Когда R_V / kL мало, а M велико, то характеристики течения во многих отношениях аналогичны характеристикам индукционного двигателя с высоким сопротивлением ротора. Точно так же при больших значениях R_V / kL характеристики течения аналогичны характеристикам индукционного двигателя с низким сопротивлением ротора.

Используя формулу (8.29), можно построить графики зависимости механического градиента давления от скольжения, которые напоминают кривые зависимости

крутящего момента от скольжения для индукционных двигателей, содержащиеся в любых руководствах по электродвигателям. Умножая это выражение на R_V/kL , получаем

$$\frac{R_e R_V}{k L M^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{X}} = \frac{R_V S / k L}{1 + \left(\frac{R_V S}{k L} \right)^2},$$

или

$$\frac{1}{k L R_H} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{X}} = \frac{R_V S / k L}{1 + \left(\frac{R_V S}{k L} \right)^2}. \quad (8.31)$$

Левую часть выражения (8.31) можно записать в виде

$$\frac{1}{k L R_H} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{X}} = \frac{8 L^2}{\mu_0 k I^2} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right);$$

таким образом, в нее входят только механический градиент давления, геометрические параметры k и L и число ампер-витков I . Правая часть есть функция параметра реактивности

$$\frac{R_V}{k L} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{k^2},$$

который не зависит от ширины канала. Кривые зависимости градиента давления от скольжения при нескольких значениях параметра реактивности изображены на фиг. 19. Кривые такого типа весьма полезны при проектировании индукционных насосов.

Другим интересным свойством полученного здесь решения является подобие между профилями скорости, которые определяются формулой (8.22), и профилями Гартмана для ламинарного течения в постоянном поперечном магнитном поле. В обоих случаях осредненную скорость можно записать в виде

$$\bar{u}_x = C \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \beta M \mathcal{Y}}{\operatorname{ch} \beta M} \right),$$

где C не зависит от \mathcal{Y} . Таким образом, в обоих случаях можно записать

$$\frac{\bar{u}_x}{u^*} = \frac{R^*}{\beta M} \operatorname{cth} \beta M \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \beta M \mathcal{Y}}{\operatorname{ch} \beta M} \right).$$

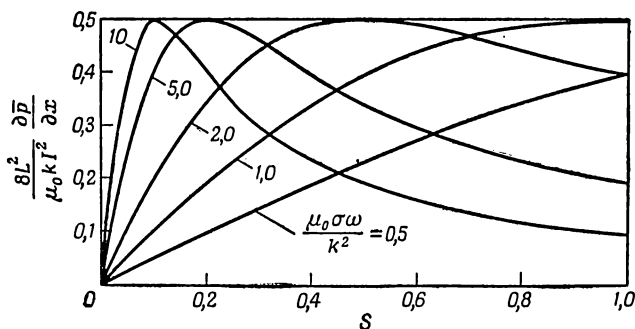
Для течения в постоянном магнитном поле M обычно определяется так, чтобы $\beta = 1$; во всяком случае, мы должны иметь

$$(\beta M)_{\text{пост. поле}} = B_0 L \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}},$$

где B_0 — поперечное магнитное поле. Произведение $B_0 L$ пропорционально числу ампер-витков обмотки возбуждения. Для течения в бегущем магнитном поле из наших определений β и M следует

$$(\beta M)_{\text{бег. поле}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mu_0 \sigma \omega S}{k^2}}} \left(\frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \right).$$

Таким образом, мы нашли между этими двумя течениями формальное математическое сходство и в то же



Фиг. 19. Зависимость градиента давления от скольжения для ламинарного течения в бегущем магнитном поле.

время значительное физическое различие. Очевидно, что при условии правильной интерпретации величины βM можно использовать решение для профилей скорости, соответствующее течению в постоянном магнитном поле, и в случае течения в бегущем магнитном поле. Можно ожидать, что эта аналогия между течениями в постоянном и бегущем магнитном поле выполняется и для турбулентных течений. Физическое различие возникает из-за того, что для течения в постоянном магнитном

поле βM не зависит от механического перепада давления, и перепад давления определяет только амплитуду, но не форму профиля скорости, в то время как при течении в бегущем магнитном поле давление оказывает дополнительное воздействие на профиль вследствие зависимости βM от осредненного скольжения S . При возрастании механической нагрузки профиль скорости течения в бегущем магнитном поле приближается к параболическому.

Подобие профилей скорости для течений в постоянном и бегущем магнитном поле позволяет провести простую оценку погрешности в величинах осредненных касательных напряжений на стенках канала, обусловленной допущениями, которые упоминались в предыдущем параграфе. Эти допущения относятся к случаям, когда частоты скольжения столь велики, что влияние пульсационных компонент сил на механическое движение ничтожно. Здесь мы обратимся к другому крайнему случаю и допустим, что частоты скольжения являются столь низкими, что профиль скорости в каждом поперечном сечении канала будет профилем Гартмана, соответствующим мгновенному значению магнитной индукции в каждом сечении. Так как средняя по поперечному сечению канала скорость \bar{V} должна быть всюду постоянна, то в этом случае компонента скорости жидкости u_x примет вид

$$u_x = \bar{V} \frac{1 - \frac{\text{ch } M_l y / L}{\text{ch } M_l}}{1 - \frac{\text{th } M_l}{M_l}},$$

где M_l — „локальное число Гартмана“

$$M_l = B_y L \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}},$$

зависящее от мгновенного значения поперечной компоненты магнитного поля B_y . Локальное значение касательного напряжения на стенке

$$\tau_l = \left| \eta \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=L} = \frac{\eta \bar{V}}{L} \frac{M_l \text{th } M_l}{1 - \frac{\text{th } M_l}{M_l}}.$$

Осреднение этого выражения по x дает среднее значение касательного напряжения для течений с очень низкими

частотами скольжения. В общем случае осреднение включает трудоемкое интегрирование, однако интересные предельные случаи можно проанализировать при помощи простых оценок. Если M_l всюду мало, то профиль скорости всюду почти параболический, τ_l почти постоянно и

$$(\tau_l)_{\text{ср}} \approx 3 \frac{\eta \bar{V}}{L}, \quad M_l \ll 1,$$

что совпадает с результатом, полученным из нашего предыдущего решения. С другой стороны, если максимальное значение M_l очень велико и поперечное магнитное поле меняется синусоидально вдоль канала, то

$$\tau_l \approx \frac{\eta \bar{V}}{L} M_l, \quad (M_l)_{\text{макс}} \gg 1$$

и

$$(\tau_l)_{\text{ср}} \approx \frac{2}{\pi} \frac{\eta \bar{V}}{L} (M_l)_{\text{макс}}, \quad (M_l)_{\text{макс}} \gg 1.$$

Наше предыдущее решение, которое определяется формулами (8.22) и (8.23), в этом случае дает

$$(\tau_l)_{\text{ср}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\eta \bar{V}}{L} (M_l)_{\text{макс}}, \quad (M_l)_{\text{макс}} \gg 1.$$

Таким образом, при одном и том же расходе и распределении магнитного поля осредненные значения касательного напряжения на стенке, рассчитанные в предположении, что частота скольжения «механически высокая» или «механически низкая», различаются менее чем на 11%.

§ 5. Приближенные формулы для определения мощности

Коэффициент полезного действия и распределение потерь при ламинарном течении в бегущем магнитном поле можно рассчитать приближенно из рассмотрения выделенного в потоке единичного объема, изображенного на фиг. 20. Приближения, которые используются в этих расчетах, обычно сводятся к допущению, что отклонение скорости от осредненного значения пренебрежимо мало.

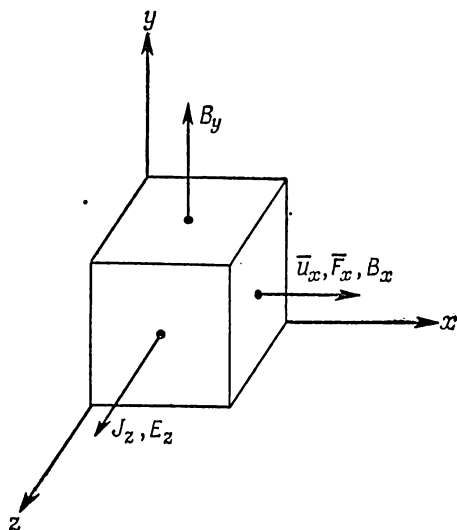
Плотность тока J_z и полная механическая сила на единицу объема F_x , показанные на фиг. 20, определяются выражениями

$$J_z \approx \sigma(E_z + \bar{u}_x B_y)$$

и

$$F_x = -J_z B_y.$$

Так как источник магнитной (а также электрической) энергии периодичен по времени, средняя электрическая



Фиг. 20. Элементарный объем, используемый при расчете мощностей.

мощность \bar{P}_E , подводимая к единице объема, есть просто $\overline{E_z J_z}$. Это можно записать в безразмерном виде

$$\frac{\bar{P}_E}{\sigma U_0^2 B_0^2} = \overline{\mathcal{E}_z \mathcal{J}_z},$$

или, используя выражения (8.4), (8.9), (8.15), (8.17) и (8.23),

$$\bar{P}_E \approx \frac{\sigma}{8} \left(\frac{\mu_0 \omega I}{kL} \right)^2 \beta^2 (1 - \bar{u}_x).$$

Тогда осредненное по сечению значение \bar{P}_E запишется как

$$\langle \bar{P}_E \rangle \approx \frac{\sigma}{8} \left(\frac{\mu_0 \omega I}{kL} \right)^2 \beta^2 S. \quad (8.32)$$

Эта величина соответствует «мощности в зазоре» в обычном индукционном двигателе.

Средняя механическая мощность \bar{P}_M , выделяющаяся в единице объема, равна приблизительно $-\bar{F}_x \bar{u}_x$, или, в безразмерном виде,

$$\frac{\bar{P}_M}{\sigma U_0^2 B_0^2} \approx -\overline{J_z \mathcal{B}_y u_x}.$$

В этом случае

$$\bar{P}_M \approx \frac{\sigma}{8} \left(\frac{\mu_0 \omega I}{kL} \right)^2 \beta^2 \bar{u}_x (1 - \bar{u}_x),$$

и осредненное по сечению значение \bar{P}_M будет приближенно представляться формулой

$$\langle \bar{P}_M \rangle \approx \frac{\sigma}{8} \left(\frac{\mu_0 \omega I}{kL} \right)^2 \beta^2 S (1 - S). \quad (8.33)$$

В эту механическую мощность входит как мощность, расходуемая полезно против приложенной механической нагрузки, так и мощность, переходящая в тепло вследствие вязкой диссипации. Формула (8.33) выполняется строго только в том случае, когда \bar{u}_x постоянно поперек канала.

Среднее локальное значение коэффициента полезного действия преобразования, т. е. доля подводимой мощности, которая превращается в механическую мощность, есть отношение

$$\frac{\langle \bar{P}_M \rangle}{\langle \bar{P}_E \rangle} \approx 1 - S. \quad (8.34)$$

Таким образом, $(1 - S)$ -я часть «мощности в зазоре» превращается в механическую мощность, а остальная диссипируется в джоулево тепло. Величина $(1 - S)$ дает верхнюю границу для полного коэффициента полезного действия потока, рассчитываемого по получаемой полезной мощности,

Потери за счет вязкости могут быть оценены из профиля скорости. Локальное среднее значение мощности \bar{P}_η , затрачиваемой на преодоление сил вязкости в единице объема, записанное в безразмерной форме, выражается как

$$\frac{\bar{P}_\eta}{\sigma U_0^2 B_0^2} \approx \frac{1}{\sigma U_0^2 B_0^2} \left(-\eta \bar{u}_x \frac{d^2 \bar{u}_x}{dy^2} \right) = -\frac{\bar{u}_x}{M^2} \frac{d^2 \bar{u}_x}{d\mathcal{Y}^2}.$$

Так как скорость на стенках равна нулю и градиент скорости в центре канала тоже равен нулю, то осредненное по сечению канала значение этой величины будет

$$\langle \bar{P}_\eta \rangle \frac{1}{\sigma U_0^2 B_0^2} \approx \frac{1}{M^2} \int_0^1 \bar{u}_x \frac{d^2 \bar{u}_x}{d\mathcal{Y}^2} d\mathcal{Y} = \frac{1}{M^2} \int_0^1 \left(\frac{d\bar{u}_x}{d\mathcal{Y}} \right)^2 d\mathcal{Y}.$$

Используя соотношение (8.22), получаем

$$\langle \bar{P}_\eta \rangle \frac{1}{\sigma U_0^2 B_0^2} \approx \frac{\left[1 - \frac{R_e}{(\beta M)^2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \mathcal{X}} \right]^2 \beta^2}{\operatorname{ch}^2 \beta M} \left(\frac{\operatorname{sh} 2\beta M}{4\beta M} - \frac{1}{2} \right).$$

Это выражение при достаточно больших M , когда справедлива формула (8.29), принимает вид

$$\frac{\langle \bar{P}_\eta \rangle}{\sigma U_0^2 B_0^2} \approx \frac{(1-S)^2 \beta}{4M},$$

или с учетом (8.4)

$$\langle \bar{P}_\eta \rangle \approx \frac{\sigma}{8} \left(\frac{\mu_0 \omega I}{kL} \right)^2 \frac{(1-S)^2 \beta}{4M}. \quad (8.35)$$

Долю «мощности в зазоре», которая расходуется на преодоление вязкого трения, можно найти из выражений (8.32) и (8.35):

$$\frac{\langle \bar{P}_\eta \rangle}{\langle \bar{P}_E \rangle} \approx \frac{(1-S)^2}{4\beta MS}. \quad (8.36)$$

Из выражений (8.34) и (8.36) можно приближенно определить полный коэффициент полезного действия канала, рассчитываемый по получаемой полезной механи-

ческой мощности и подводимой электрической «мощности в зазоре»:

$$\frac{\langle \bar{P}_M \rangle - \langle \bar{P}_\eta \rangle}{\langle \bar{P}_E \rangle} \approx (1 - S) \left[1 - \frac{(1 - S)}{4\beta MS} \right]. \quad (8.37)$$

Формулы (8.32)—(8.37) дают приближенное распределение мощностей для идеализированного ламинарного течения в канале в бегущем магнитном поле. Аналогия между этим распределением и соответствующим распределением в обычном индукционном двигателе наводит на мысль, что многие задачи, связанные с проектированием индукционных насосов, будут, по-видимому, аналогичны задачам, встречающимся при проектировании индукционных двигателей, особенно двигателей с большим воздушным зазором. Существенная разница между насосом и соответствующим двигателем заключается в относительной величине потерь на трение в этих двух машинах. В обычных электродвигателях потери на трение, как правило, весьма малы, и такие двигатели могут нормально работать при скольжении менее 5%. Соотношения (8.36) и (8.37) показывают, что для приемлемых значений βM наилучший режим работы индукционных насосов, по-видимому, будет достигаться при скольжениях, больших 10—15%.

Применяя результаты данного параграфа к расчету установок, в которых используется течение в бегущем магнитном поле, необходимо соблюдать осторожность. Данное решение основано на допущении, что течение является ламинарным, а в большинстве устройств оно бывает турбулентным, и потери на трение могут сильно отличаться от потерь, рассчитанных здесь. Кроме того, мы не учитывали электрические потери в обмотках возбуждения. Они будут снижать коэффициент полезного действия устройства. Ограничившись рассмотрением бесконечно длинного канала, мы не учитывали омические потери во входном и выходном участках канала. Этим потерям, которые могут составлять до 30% полных потерь, было уделено большое внимание в работах Уатта [15] и Блэйка [3]. Необходимо искать пути, которые позволят свести к минимуму входные эффекты.

Глава IX

ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ В БЕГУЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 1. Основные уравнения

В настоящей главе будет показано, что математическое сходство течений в постоянном и бегущем магнитных полях при ламинарном движении, отмеченное в предыдущей главе, существует при аналогичных допущениях и в случае турбулентного течения. С этой целью мы выведем уравнение для профиля осредненной скорости, которое формально идентично уравнению (3.29б) гл. III, и установим физический смысл каждого входящего в него члена.

Физическая модель исследуемого здесь течения совпадает с моделью, изображенной на фиг. 18 и описанной в § 1 гл. VIII. Свойства симметрии такого течения аналогичны свойствам течений, рассмотренных ранее, и классификация переменных в зависимости от их четности или нечетности по координате y , приведенная в табл. 1, остается справедливой и в этом случае. Будем по-прежнему пользоваться уравнениями магнитной гидродинамики в безразмерном виде [уравнения (3.2) — (3.5) и (3.31)]. Здесь удобно видоизменить безразмерные переменные, и в качестве основных нормирующих параметров выбрать полуширину канала L , динамическую скорость \bar{u}^* и среднеквадратическое значение магнитной индукции при отсутствии токов проводимости:

$$\begin{aligned} L_0 &\equiv L, \\ U_0 &\equiv \bar{u}^*, \\ B_0 &\equiv \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}L}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

При таком выборе характерной скорости U_0 критерий Re равен R^* , где R^* определяется соотношением (2.6).

Предположения, необходимые для вывода основных уравнений турбулентного течения в бегущем магнитном поле, сходны с теми, которые использовались в предыдущей главе при анализе соответствующего ламинарного течения. Будем считать, что частота скольжения достаточно низка, так что скин-эффектом можно пренебречь, и поперечная компонента осредненной магнитной индукции постоянна по сечению канала. Это предположение удовлетворяется при том же условии, что и в случае ламинарного течения:

$$(kL)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_0 \sigma \omega}{k^2}\right)^2} \ll 1. \quad (9.2)$$

Вектор скорости \mathbf{U} представим в виде суммы осредненной по времени (обозначена чертой сверху) и пульсационной (обозначена штрихом) составляющих

$$\mathbf{U} = \overline{\mathbf{U}} + \mathbf{U}', \quad (9.3)$$

где

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{U}}}{\partial \tau} = \overline{\mathbf{U}}' = 0. \quad (9.4)$$

Осредненная скорость имеет, конечно, единственную отличную от нуля компоненту $\overline{u}_x(\mathcal{Y})$. Пульсационная скорость \mathbf{U}' может иметь все три пространственные компоненты, зависящие от \mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{Z} и τ . В общем случае каждая пульсационная компонента складывается из части, стационарной по τ и \mathcal{X} , и части, которая является статистической величиной, периодически меняющейся по τ и \mathcal{X} . Для упрощения математических выкладок мы не будем здесь учитывать токи, индуцированные в канале в результате взаимодействия периодически меняющейся части \mathbf{U}' с магнитным полем. По сути дела, вводя совместно два указанных предположения, мы пытаемся использовать ожидаемое различие между электрической и механической «постоянными времени» потока почти так же, как это делается при анализе переходных процессов в обычных электрических двигателях.

При использовании понятий постоянной времени или критической частоты применительно к нелинейной системе с распределенными параметрами, каковой является

рассматриваемое течение в канале, необходимо соблюдать осторожность, поскольку эти понятия заимствуются главным образом из опыта исследования линейных систем с сосредоточенными параметрами. Тем не менее можно легко оценить минимальное время, которое потребуется для существенного перераспределения количества движения в канале под воздействием механизма турбулентных пульсаций. Это примерно такое время, за которое происходит обмен веществом между центральной и периферийной зонами канала, обусловленный пульсационной скоростью u'_y , т. е.

$$t \approx \frac{L}{\sqrt{\overline{(u'_y)^2}}}.$$

Ввиду того что для периодичности пульсаций скорости требуется, чтобы этот обмен происходил с частотой скольжения, то при условии

$$\frac{S\omega L}{\sqrt{\overline{(u'_y)^2}}} \gg 1$$

периодичность должна подавляться. Экспериментальные данные, полученные Лауфером [9], показали, что в турбулентном ядре течения в канале при отсутствии магнитного поля $\sqrt{\overline{(u'_y)^2}} \approx \bar{u}^*$. Из анализа результатов гл. VII следует, что при наличии существенных магнито-гидродинамических эффектов пульсации скорости резко уменьшаются. Так как грубые оценки показывают, что величина отношения $(S\omega L/\bar{u}^*)$ для большинства важных в технических приложениях течений в бегущем магнитном поле заключена в интервале 0,5—5,0, то наше пренебрежение статистической периодичностью пульсаций скорости будет, по-видимому, оправдано во многих случаях, имеющих практический интерес.

Принимая во внимание только что сделанные предположения, при расчете распределения токов по формуле (3.2) скорость U можно рассматривать как стационарную (по \mathcal{X} и τ) стохастическую переменную. Анализ системы уравнений магнитной гидродинамики (3.2а)—(3.2г) показывает, что эти уравнения допускают реше-

ния для E , B и J , которые могут быть представлены в виде бегущих волн со стационарными стохастическими (комплексными) амплитудами. Используя нормализующие параметры, определенные согласно (9.1), получаем представление для бегущей волны в безразмерном виде

$$e^{j(\omega t - kx)} = e^{j\left(\frac{\omega L}{u^*} \tau - kLx\right)}. \quad (9.5)$$

Отсюда безразмерные электромагнитные переменные могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} E &= \text{Re} \left\{ e e^{j\left(\frac{\omega L}{u^*} \tau - kLx\right)} \right\}, \\ B &= \text{Re} \left\{ b e^{j\left(\frac{\omega L}{u^*} \tau - kLx\right)} \right\}, \\ J &= \text{Re} \left\{ i e^{j\left(\frac{\omega L}{u^*} \tau - kLx\right)} \right\}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Вследствие стохастического характера течения комплексные векторы e , b и i могут зависеть от \mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{Z} и τ . Однако, учитывая свойства симметрии, можно утверждать, что осредненные по времени значения этих векторов будут зависеть только от \mathcal{Y} . Следовательно, данные векторы можно разложить на осредненные и пульсационные составляющие:

$$\begin{aligned} e &= \bar{e}(\mathcal{Y}) + e'(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \tau), \\ b &= \bar{b}(\mathcal{Y}) + b'(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \tau), \\ i &= \bar{i}(\mathcal{Y}) + i'(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \tau), \end{aligned} \quad (9.7)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{e}}{\partial \tau} &= \bar{e}' = 0, \\ \frac{\partial \bar{b}}{\partial \tau} &= \bar{b}' = 0, \\ \frac{\partial \bar{i}}{\partial \tau} &= \bar{i}' = 0. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Предполагается, что пульсации e' , b' и i' стационарны по переменным \mathcal{X} и τ . Вследствие условий симметрии

все переменные параметры течения стационарны по \mathcal{Z} , а все осредненные величины не зависят от \mathcal{Z} .

Подставляя соотношения (9.6) в (3.2а), (3.2б) и (3.2г), получаем

$$\mathbf{D} \times \mathbf{e} + jkL(\mathbf{e} \times \mathbf{x}) = -j \frac{\omega L}{u^*} \mathbf{b} - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \tau}, \quad (9.9)$$

$$\mathbf{D} \times \mathbf{b} + jkL(\mathbf{b} \times \mathbf{x}) = R_V \mathbf{i} \quad (9.10)$$

и

$$\mathbf{i} = \mathbf{e} + \mathbf{U} \times \mathbf{b}, \quad (9.11)$$

где \mathbf{x} — единичный вектор в направлении \mathcal{X} . Осредняя эти уравнения, будем иметь

$$\mathbf{D} \times \bar{\mathbf{e}} + jkL(\bar{\mathbf{e}} \times \mathbf{x}) = -j \frac{\omega L}{u^*} \bar{\mathbf{b}}, \quad (9.12)$$

$$\mathbf{D} \times \bar{\mathbf{b}} + jkL(\bar{\mathbf{b}} \times \mathbf{x}) = R_V \bar{\mathbf{i}} \quad (9.13)$$

и

$$\bar{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{e}} + \bar{\mathbf{U}} \times \bar{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{U}' \times \mathbf{b}'}. \quad (9.14)$$

Используя соотношения (9.6), можно показать, что осредненное значение вектора электромагнитной силы, фигурирующее в уравнении (3.2е), пропорционально величине

$$(\overline{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}) = \frac{1}{4} (\overline{\mathbf{i} \times \mathbf{b}^c} + \overline{\mathbf{i}^c \times \mathbf{b}}), \quad (9.15)$$

где индекс c означает комплексно сопряженную величину. Принимая во внимание соотношения (9.7), получаем

$$(\overline{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}) = \frac{1}{4} (\bar{\mathbf{i}} \times \bar{\mathbf{b}}^c + \bar{\mathbf{i}}^c \times \bar{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{i}' \times \mathbf{b}'^c} + \overline{\mathbf{i}'^c \times \mathbf{b}'}). \quad (9.16)$$

Последние два члена в правой части уравнения (9.16) можно преобразовать с помощью уравнения (9.10) к виду, содержащему только компоненты магнитного поля. Поскольку это уравнение линейно, оно должно удовлетворяться отдельно как для осредненных, так и для пульсационных составляющих векторов \mathbf{b} и \mathbf{i} ; следовательно,

$$\mathbf{i}' = \frac{1}{R_V} [\mathbf{D} \times \mathbf{b}' + jkL(\mathbf{b}' \times \mathbf{x})], \quad (9.17)$$

и уравнение (9.16) может быть записано в виде

$$(\overline{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}) = \frac{1}{4} (\bar{\mathbf{i}} \times \bar{\mathbf{b}}^c + \bar{\mathbf{i}}^c \times \bar{\mathbf{b}}) + \\ + \frac{1}{4R_V} [(\overline{\mathbf{D} \times \mathbf{b}'} \times \mathbf{b}'^c} + \overline{(\mathbf{D} \times \mathbf{b}'^c) \times \mathbf{b}'}] + \\ + \frac{jkL}{4R_V} [(\overline{(\mathbf{b}' \times \mathbf{x}) \times \mathbf{b}'^c}} - \overline{(\mathbf{b}'^c \times \mathbf{x}) \times \mathbf{b}'}]. \quad (9.18)$$

Из уравнений (3.2в) и (9.6) найдем, что

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{b} - jkL (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) = 0, \quad (9.19)$$

а так как уравнение (9.19) линейно, то

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{b}' = jkL (\mathbf{b}' \cdot \mathbf{x}). \quad (9.20)$$

Подставляя уравнение (9.20) в (9.18), получаем (в диадной форме)

$$(\overline{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}) = \frac{1}{4} (\bar{\mathbf{i}} \times \bar{\mathbf{b}}^c + \bar{\mathbf{i}}^c \times \bar{\mathbf{b}}) + \\ + \frac{1}{4R_V} \mathbf{D} [\overline{\mathbf{b}' \mathbf{b}'^c} + \overline{\mathbf{b}'^c \mathbf{b}'}] - \frac{1}{4R_V} \mathbf{D} (\overline{\mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}'^c}). \quad (9.21)$$

Осредняя уравнение количества движения (3.2е), будем иметь

$$\mathbf{D} \left[\bar{\wp} + \frac{R_H}{4} (\overline{\mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}'^c}) \right] = \frac{D^2 \bar{U}}{R^*} + \frac{M^2}{4R^*} (\bar{\mathbf{i}} \times \bar{\mathbf{b}}^c + \bar{\mathbf{i}}^c \times \bar{\mathbf{b}}) - \\ - \mathbf{D} \cdot \left[\overline{\mathbf{U} \mathbf{U}} - \frac{R_H}{4} (\overline{\mathbf{b}' \mathbf{b}'^c} + \overline{\mathbf{b}'^c \mathbf{b}'} \right]. \quad (9.22)$$

Используя уравнения (9.12) — (9.14) и (9.22), можно выразить осредненные величины $\bar{\mathbf{e}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{i}}$ и \bar{U} через корреляции пульсационных величин и параметры потока. Как и в соответствующем ламинарном течении, в данном случае отличны от нуля только осредненные составляющие \bar{e}_z , \bar{i}_z , \bar{b}_y , \bar{b}_x и \bar{u}_x . Поэтому из уравнений (9.12) — (9.14) следует

$$\bar{e}_z = -\frac{\omega}{ku^*} \bar{b}_y, \quad (9.23)$$

$$\bar{i}_z = -\left(\frac{\omega}{ku^*} - \bar{u}_x \right) \bar{b}_y + (\overline{u'_x b'_y} - \overline{b'_x u'_y}) \quad (9.24)$$

и

$$\frac{db_x}{dq} = -jkL \bar{b}_y - R_V \bar{i}_z. \quad (9.25)$$

Проектируя уравнение (9.22) на ось x с учетом (9.24), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{X}} = & \frac{1}{R^*} \frac{d^2 \bar{u}_x}{d\mathcal{Y}^2} + \frac{M^2}{R^*} \left(\frac{\bar{b}_y \bar{b}_y^c}{2} \right) \times \\ & \times \left[\left(\frac{\omega}{k u^*} - \bar{u}_x \right) - \frac{\bar{u}'_x \bar{b}'_y - \bar{b}'_x \bar{u}'_y}{2 \bar{b}_y} - \frac{\bar{u}'_x \bar{b}'_y{}^c - \bar{b}'_x \bar{u}'_y{}^c}{2 \bar{b}_y^c} \right] - \\ & - \frac{d}{d\mathcal{Y}} \left[\bar{u}_x \bar{u}_y - \frac{R_H}{4} (\bar{b}_y \bar{b}_x^c + \bar{b}_y^c \bar{b}_x) \right]. \quad (9.26) \end{aligned}$$

Уравнение (9.22) дает также проекции на оси y и z , однако они выражают баланс сил в направлениях, перпендикулярных к потоку, и поэтому не представляют интереса.

Граничные условия для такого течения аналогичны рассмотренным ранее. На стенке все компоненты вектора скорости \mathbf{U} должны быть равны нулю и все корреляции пульсационных скоростей также должны обращаться в нуль. Осредненная компонента магнитного поля по оси x определяется соотношением

$$\bar{b}_x = \pm \sqrt{2} k L, \quad \mathcal{Y} = \pm 1. \quad (9.27)$$

Вне канала ротор и дивергенция вектора \mathbf{B} должны равняться нулю, и преобразования, аналогичные проделанным при выводе формулы (9.21) из (9.18), приводят к следующему результату:

$$\mathbf{D} \cdot [\overline{\mathbf{b}' \mathbf{b}'^c} + \overline{\mathbf{b}'^c \mathbf{b}'}] - \mathbf{D} \cdot (\overline{\mathbf{b}' \cdot \mathbf{b}'^c}) = 0, \quad |\mathcal{Y}| \geq 1.$$

Проектируя это уравнение на ось x , получаем

$$\frac{d}{d\mathcal{Y}} (\overline{b'_y b'_x{}^c} + \overline{b'_y{}^c b'_x}) = 0, \quad |\mathcal{Y}| \geq 1,$$

а так как на больших расстояниях от канала все поля должны исчезать, то

$$\overline{b'_y b'_x{}^c} + \overline{b'_x b'_y{}^c} = 0, \quad |\mathcal{Y}| \geq 1. \quad (9.28)$$

§ 2. Аналогия между течениями в бегущем и постоянном магнитных полях

Если определить четную и нечетную корреляционные функции $P_2(\mathcal{Y})$ и $Q_2(\mathcal{Y})$ по аналогии с соответствующими функциями, используемыми при анализе турбулентного течения в постоянном магнитном поле, следующим образом:

$$P_2(\mathcal{Y}) = \frac{\overline{u'_x b'_y - b'_x u'_y}}{2\bar{b}_y} + \frac{\overline{u'_x b'^c_y - b'^c_x u'_y}}{2\bar{b}^c_y} \quad (9.29)$$

и

$$Q_2(\mathcal{Y}) = \overline{u'_x u'_y} - R_H \beta^2 \left(\frac{\overline{b'_y b'^c_x + b'^c_y b'_x}}{2\bar{b}_y \bar{b}^c_y} \right), \quad (9.30)$$

где

$$\beta^2 = \frac{\bar{b}_y \bar{b}^c_y}{2},$$

то уравнение (9.26) может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R^*} \frac{d^2 \bar{u}_x}{d\mathcal{Y}^2} + \frac{(M\beta)^2}{R^*} [\bar{u}_x + P_2 - \langle \bar{u}_x + P_2 \rangle] + \frac{dQ_2}{d\mathcal{Y}} = \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{X}} + \frac{(M\beta)^2}{R^*} \left\langle \frac{\omega}{k u^*} - \bar{u}_x - P_2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Как и прежде, символ $\langle \rangle$ означает осреднение по сечению канала. Первый член в левой части уравнения (9.31) представляет безразмерную осредненную силу вязкого сопротивления, отнесенную к единице объема. Второй член есть безразмерная сила магнитогидродинамического сопротивления, появляющаяся в результате взаимодействия синусоидальной составляющей магнитного поля с синусоидальными токами, циркулирующими в поперечном сечении канала $\mathcal{X} = \text{const}$. Среднее по сечению значение этой силы равно нулю; она соответствует осредненному магнитогидродинамическому сопротивлению, обусловленному взаимодействием осредненного тока с осредненным магнитным полем для турбулентного течения в постоянном магнитном поле. Третий член в

левой части уравнения (9.31) представляет осредненное сопротивление, обусловленное корреляцией пульсационных составляющих скорости и взаимодействием пульсационных составляющих тока с пульсационными составляющими поля. Так как значение Q_2 на границах должно равняться нулю, то средняя по сечению величина этого члена будет равна нулю, как и в случае течения в постоянном магнитном поле. Первый член в правой части уравнения (9.31) представляет силу механического давления, отнесенную к единице объема, которая способствует разгону жидкости. Для течений в бегущем поле этот член обычно бывает отрицательным. Второй член представляет осредненную силу, отнесенную к единице объема, появляющуюся вследствие взаимодействия магнитного поля с компонентой суммарного тока, проходящего через канал. Как и в случае ламинарного течения, рассматривавшемся в гл. VIII, в данном течении также имеются токи, которые циркулируют в плоскостях $\mathcal{Y} = \text{const}$ и, проходя по каналу при некотором значении \mathcal{X} , «возвращается» на расстоянии, равном половине длины волны. Это те самые токи, которые обуславливают появление индукционных сил, поддерживающих течение жидкости. Токи, циркулирующие в сечении канала $\mathcal{X} = \text{const}$, не создают средней пространственной силы, а вызывают такое распределение внутренних напряжений, под действием которого профиль скорости стремится стать однородным.

Для равновесия сил, действующих на слой единичной толщины, вырезанный перпендикулярно оси \mathcal{X} , необходимо, чтобы сумма двух членов в правой части уравнения (9.31) равнялась безразмерному напряжению трения на стенке, т. е. просто единице,

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathcal{X}} + \frac{(M\beta)^2}{R^*} \left\langle \frac{\omega}{k u^*} - \bar{u}_x - P_2 \right\rangle = \frac{\tau_0}{\rho u^{*2}} \equiv 1. \quad (9.32)$$

Тогда уравнение (9.31) принимает вид

$$-\frac{1}{R^*} \frac{d^2 \bar{u}_x}{d\mathcal{Y}^2} + \frac{(M\beta)^2}{R^*} [\bar{u}_x + P_2 - \langle \bar{u}_x + P_2 \rangle] + \frac{dQ_2}{d\mathcal{Y}} = 1. \quad (9.33)$$

Уравнение (9.33) аналогично уравнению (3.296) для турбулентного течения в постоянном магнитном поле и

формально отличается от последнего тем, что в нем вместо M стоит $M\beta$, а P_1 и Q_1 заменены соответствующими функциями P_2 и Q_2 . Таким образом, рассуждения гл. III, на основании которых был сделан вывод о том, что для течения в постоянном магнитном поле \bar{u}_x должно зависеть только от M , R^* и \mathcal{U} , остаются применимыми, и можно заключить, что для течения в бегущем магнитном поле \bar{u}_x должно зависеть только от $M\beta$, R^* и \mathcal{U} . Точно так же все выводы, сделанные в гл. IV, должны быть применимы и к течению в бегущем магнитном поле, если M везде заменить произведением $M\beta$. Следует ожидать, по крайней мере до тех пор, пока не будут получены экспериментально противоречащие результаты, что кривые зависимостей \bar{u}_x/\bar{u}^* и $\bar{u}'_x\bar{u}'_y/\bar{u}^{*2}$ от ξ , приведенные на фиг. 11—15 и на фиг. 17, будут также применимы и для течения в бегущем магнитном поле, если M везде заменить на $M\beta$.

Распределение тока для течения в бегущем магнитном поле можно приближенно определить по уравнению (9.24). Если пренебречь синусоидальными токами, обусловленными корреляцией между пульсациями поля и скорости, по сравнению с токами, появляющимися вследствие взаимодействия осредненной скорости с синусоидальным полем, то уравнение (9.24), выраженное через основные физические переменные, принимает вид

$$\frac{V(\bar{J}_z)^2}{\sigma U_0 B_0 \beta} = - \left(\frac{\omega}{k\bar{u}^*} - \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}^*} \right),$$

или, используя соотношение (9.1),

$$\frac{2\sqrt{2}L}{\beta\mu_0\sigma I\bar{u}^*} \frac{V(\bar{J}_z)^2}{V} = \left(\frac{\bar{u}_x}{\bar{u}^*} - \frac{\bar{V}}{\bar{u}^*} \right) - \left(\frac{\omega}{k\bar{u}^*} - \frac{\bar{V}}{\bar{u}^*} \right). \quad (9.34)$$

Первый член в правой части уравнения (9.34), заключенный в скобки, есть величина, которая откладывается по оси ординат на фиг. 16. Этот член представляет ток, циркулирующий в сечении канала $\mathcal{X} = \text{const}$. Величина во вторых скобках в правой части уравнения (9.34) есть постоянная, не зависящая от \mathcal{U} ; она определяет амплитуду тока, протекающего через канал и циркулирующе-

го в плоскостях $\mathcal{U} = \text{const}$. Знак минус перед этим членом объясняется тем, что эта составляющая тока смещена по фазе относительно поперечной составляющей магнитного поля на 180° . Следовательно, можно ожидать, что кривые плотности тока для течения в постоянном магнитном поле, представленные на фиг. 16, будут применимы и в случае течения в бегущем магнитном поле, если заменить величину, отложенную по оси ординат, на величину, стоящую в левой части уравнения (9.34), заменить параметр M , по которому построены кривые, на $M\beta$, и сдвинуть все кривые вниз по оси ординат на величину:

$$\left(\frac{\omega}{k\bar{u}^*} - \frac{\bar{V}}{\bar{u}^*} \right) = \frac{S\omega}{k\bar{u}^*}.$$

Модуль параметра β можно определить приближенно из уравнений (9.25), (9.24) и (9.27). Если пренебречь синусоидальными токами, обусловленными корреляцией между пульсациями скорости и поля, то из этих уравнений

$$\bar{b}_y \approx \frac{\sqrt{2} kL}{-jkL + \frac{R_V \omega S}{k\bar{u}^*}}$$

и, следовательно,

$$\beta \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu_0 \sigma \omega S}{k^2} \right)^2}}, \quad (9.35)$$

так же, как и при ламинарном течении в бегущем магнитном поле.

Появление параметра β в окончательных результатах настоящей главы можно объяснить по крайней мере с двух точек зрения. Анализ результатов последних двух параграфов показывает, что β всегда встречается в комбинациях βM , βB_0 и $\beta^2 R_H$. Поскольку β , по определению, есть отношение среднеквадратического значения поперечного магнитного поля в рабочем канале к среднеквадратическому значению поля, которое имело бы место в пустом начале, эти комбинации позволяют нормализовать параметры течения таким образом, что основное

безразмерное поле будет равно среднеквадратическому значению магнитного поля, действительно имеющего место в рабочем канале. Следовательно, βM можно рассматривать как эффективное число Гартмана, определенное по магнитному полю в рабочем канале. С другой стороны, β можно рассматривать как величину, которая характеризует влияние на течение в бегущем магнитном поле магнитного числа Рейнольдса и появляется в расчетных формулах вследствие действия магнитных полей токов, протекающих в жидкости. При теоретическом рассмотрении течения в постоянном магнитном поле мы могли пренебречь влиянием R_V на все переменные параметры течения (кроме искажения поля), не делая при этом никаких серьезных ошибок. При течении в канале с постоянным магнитным полем, когда канал работает в режиме демпфера, искажение поля совсем незначительно. Через насосы постоянного тока проходят большие токи, и искажение поля может создать значительные трудности для конструктора, который должен предусмотреть компенсирующие меры с тем, чтобы уменьшить эффекты этого искажения. В основном искажения поля принимают характер посторонних возмущений. Однако для течения в бегущем магнитном поле поля «реакции якоря» необходимы как основное средство осуществления течения в канале. При их отсутствии обмотка, создающая поля, не может «знать» о наличии жидкости в канале, в результате чего невозможно преобразование подводимой электрической энергии в механическую¹⁾. В каналах с большой нагрузкой такие поля имеют примерно тот же порядок величины, что и поля, наводимые только обмоткой статора, и могут вызывать сдвиг по фазе суммарного магнитного потока через канал вплоть до 90° . Таким образом, магнитное число Рейнольдса должно быть важным параметром, определяющим рабочие характеристики канала с бегущим магнитным полем. Его влияние в нашем анализе учитывается через параметр β .

¹⁾ Автор имеет в виду то обстоятельство, что если в обмотке возбуждения не наводится противо-э.д.с., обусловленная проходящими в жидкости токами, то передача энергии в принципе невозможна. — *Прим. перев.*

Проведенные аналогии между турбулентным течением в бегущем и постоянном магнитных полях связаны с двумя основными предположениями, состоящими в том, что поперечное магнитное поле является однородным поперек канала (отсутствует скин-эффект) и что пульсации скорости в канале стационарны по времени. Взятые вместе, эти предположения означают, что эффективное распределение сил, обуславливающих течение в бегущем магнитном поле, аналогично распределению сил для течения в постоянном магнитном поле. Математические преобразования, проводившиеся в данной главе, представляют собой формальное исследование результатов, вытекающих из этого сходства. Полученные здесь выводы могут быть проверены (при преодолении определенных трудностей) по результатам измерений перепада давления, расхода и магнитного поля в течении в бегущем магнитном поле, аналогичных измерениям, выполненным Мергетройдом, а также Гартманом и Лазарусом для течения в постоянном магнитном поле.

Глава X

ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ДАЛЬНЕЙШЕЙ РАБОТЫ

Расчеты, сделанные в предыдущих главах, могут служить основой приближенного определения магнито-гидродинамических эффектов при турбулентном течении в канале. Разработанные здесь методы аналогичны «полуэмпирическим» методам гидродинамики и опираются на совместное использование основных уравнений магнитной гидродинамики, теории размерностей и результатов эксперимента.

Кривая, представленная на фиг. 8, дает очень простое объяснение очевидных различий в поведении таких течений при малых магнитных полях, обнаруженных в экспериментах Мергетройда и Гартмана и Лазаруса. Анализ этой кривой показывает, что максимальное увеличение величины \bar{V}/u^* при наложении магнитного поля постоянно для всех конфигураций. Таким образом, наибольшее уменьшение коэффициента сопротивления приблизительно пропорционально степени $3/2$ коэффициента сопротивления при отсутствии поля. Гартман и Лазарус исследовали течение при низких числах Рейнольдса и высоких коэффициентах сопротивления, поэтому они обнаружили более четко выраженное уменьшение перепада давления, необходимого для поддержания данного расхода при малых магнитных полях, чем Мергетройд. Максимальное уменьшение коэффициента сопротивления происходит при определенном значении M^2/R^* и, таким образом, при значении M/R_{DH} , меняющемся приблизительно пропорционально $1/\sqrt{R_{DH}}$. Данные, полученные из экспериментов Мергетройда при $R_{DH} = 1,2 \cdot 10^5$, свидетельствуют о монотонном возрастании f при увеличении M/R_{DH} , и между первыми двумя экспериментальными точками должен существовать слабый минимум.

Одной из интересных особенностей настоящего анализа является центральная роль, которую играет коэффициент сопротивления. В обычных гидродинамических течениях в канале имеется только один независимый безразмерный параметр, помимо безразмерного расстояния, и, как правило, в качестве такого параметра используется число Рейнольдса. Однако как исходные экспериментальные данные, так и полученные в настоящей работе теоретические результаты указывают на то, что коэффициент сопротивления есть именно тот параметр, который наилучшим образом описывает условия перехода от ламинарного течения к турбулентному.

После того как на основе результатов гл. III и IV задача определения профиля скорости и коэффициента сопротивления сведена к отысканию двух неизвестных функций, каждая из которых зависит только от одного переменного, определенное эмпирически постоянство коэффициента сопротивления при переходе от ламинарного течения к турбулентному позволяет пренебречь одной из этих функций и дает способ отыскания другой. Результат этого расчета, выполненного в гл. VI, сравнивается на фиг. 10 с эмпирической кривой. Так как эмпирическая функция $F_1(x)$ определена по данным Мергетройда для канала, характеризуемого значением $f_c = 0,035$, то соответствующую эмпирическую кривую надо сравнивать с аналитическим приближением для $f_c = 0,035$. На первый взгляд, соответствие не является впечатляющим, так как ординаты кривых отличаются на весьма значительную, почти постоянную величину. Постоянство этого различия показывает, однако, что аналитические результаты правильно описывают относительные изменения профиля скорости, обусловленные изменением магнитного поля, когда поле достаточно велико.

Наиболее убедительным результатом настоящего исследования является простое, согласующееся с интуицией представление о внутренней структуре турбулентного магнитогидродинамического течения, которое вытекает из результатов, изложенных в гл. VII. Особенно поучительна фиг. 17, на которой показано изменение распределения по высоте канала турбулентного касательного напряжения в зависимости от напряженности магнит-

ного поля. Из анализа этой фигуры следует, что увеличение напряженности магнитного поля вызывает постепенное уменьшение турбулентных касательных напряжений по всему каналу и что наиболее легко турбулентные пульсации подавляются вдали от стенки. Значения M^2/R^* от единицы до двух вполне достаточны для подавления турбулентных пульсаций в центральной части канала, занимающей от половины до $3/4$ поперечного сечения. Таким образом, объективный, но близорукий наблюдатель, помещенный близ центра канала, во многих случаях «турбулентных» магнитогидродинамических течений, вероятно, сделал бы вывод, что течение непосредственно вокруг него является ламинарным.

Профили осредненной скорости, приведенные в гл. VII, подтверждают допущение, которое часто используется при проектировании магнитогидродинамических устройств, а именно что скорость жидкости по сечению канала постоянна. Конечно, как и следовало ожидать по интуиции, это допущение удовлетворяется тем лучше, чем больше магнитное поле. В практических конструкторских расчетах нам обычно приходится учитывать неоднородность профиля скорости только при оценке эффективного перепада давления и нагревания жидкости, обусловленного вязкими и омическими потерями.

Потери за счет вязкости и омические потери, связанные с токами, циркулирующими внутри канала, могут быть объединены в эффективный градиент давления, который обусловлен внутренними потерями, $(\partial \bar{p} / \partial x)_{\text{потери}}$. Этот градиент определяется формулой для потерь из обычной гидродинамики

$$\left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right)_{\text{потери}} = \frac{f}{D_H} \frac{\rho \bar{V}^2}{2}. \quad (10.1)$$

Суммарная потерянная мощность (на единицу объема канала) получается умножением этого градиента давления на среднюю по расходу скорость \bar{V} . С другой стороны, мы можем отдельно определить вязкую и омическую диссипацию из профилей скорости и плотности электрического тока, которые даны в гл. VII. В общем в турбулентном магнитогидродинамическом течении в

канале как омическая, так и вязкая диссипация наиболее велики у стенок.

В практических конструкциях дополнительно имеются потери трех видов: омические потери и потери на гистерезис в обмотках, создающих магнитное поле; омические потери, обусловленные наличием токов в канале, и омические потери, возникающие при входе и выходе жидкости из области, занятой магнитным полем. Эти потери, однако, могут быть определены обычными способами.

Результаты, изложенные в гл. IX, которые представляют собой модификацию результатов гл. VII, необходимую для применения последних к течениям в бегущем магнитном поле, также подтверждают мнение конструкторов, что потери в течениях в бегущем магнитном поле могут быть оценены, если известны потери в течениях в постоянном магнитном поле. Основное достоинство анализа, проведенного в гл. IX, заключается в том, что с его помощью можно установить условия, при которых такое предположение справедливо, и найти способы определения связи потерь в двух таких типах течений.

Средняя электрическая мощность $\langle \bar{P}_E \rangle$, подводимая к единице объема в турбулентном течении в бегущем магнитном поле, весьма точно дается формулой (8.32), полученной для ламинарного течения. Аналогично, формула (8.33) может быть использована для определения той части мощности, которая превращается в механическую мощность. Действительно, величина $\langle \bar{P}_M \rangle$, определяемая формулой (8.33), включает некоторую мощность, которая в конечном счете переходит в тепло вследствие омической диссипации, связанной с токами, циркулирующими в поперечном сечении канала. Энергия, необходимая для поддержания этих токов, не потребляется непосредственно от источников электрической мощности, а скорее генерируется механическим движением. Величина $S\langle \bar{P}_E \rangle$ дает омическую диссипацию, связанную со средним током, протекающим через поперечное сечение канала. Совместное влияние вязких потерь и омических потерь, обусловленных токами, циркулирующими внутри канала, опять можно выразить через эффективный гра-

диент давления, который определяется формулой (10.1). Коэффициент сопротивления f для этих расчетов может быть получен из формулы (7.3), если M заменить на эффективное число Гартмана $M\beta$ для течения в бегущем магнитном поле.

Обзор экспериментальных результатов, положенных в основу данного анализа, позволяет сделать некоторые рекомендации для дальнейшей экспериментальной работы. Основным связующим звеном между теорией и экспериментом в данном исследовании служат кривые, приведенные в гл. VI. Согласно изложенной теории, экспериментальные точки, нанесенные на фиг. 8, должны образовывать одну кривую; теория дает грубое приближение для функции связи, показанной на фиг. 10. В этом смысле теория подтверждается. Результаты гл. VII основываются на этой теории и включают воспроизведение закономерностей, отмеченных в эксперименте, но не использовавшихся непосредственно при определении функций в гл. VI. До сих пор, однако, еще не получено экспериментальным путем никаких профилей скорости и распределений токов или турбулентных касательных напряжений, которые могли бы быть использованы для непосредственного подтверждения результатов. Такие измерения обеспечили бы весьма точную проверку полученных здесь выводов.

Были бы также полезны дальнейшие измерения того же типа, что выполнены Мергетройдом и Гартманом и Лазарусом. В области значений $M^2/R^* < 0,3$ результаты, полученные здесь, согласуются с обеими экспериментальными работами. Для области $0,3 < M^2/R^* < 3,0$ имеется согласие лишь с данными Мергетройда, так как Гартман и Лазарус не получили турбулентного течения при таких значениях M^2/R^* . При $M^2/R^* > 3,0$ даже у Мергетройда все течения были ламинарными или близкими к ламинарным, и наши результаты не имеют прямого экспериментального подтверждения. Вид наших результатов в этой области определяется условием непрерывности изменения всех закономерностей, отмеченных при более низких значениях M^2/R^* . Дополнительные измерения перепада давления, расхода и напряженности магнитного поля в течениях с развитой турбулентностью

при высоких значениях M^2/R^* могли бы обеспечить полезную проверку использованной здесь экстраполяции экспериментальных данных. Необходимы также данные, которые позволили бы определить коэффициент сопротивления для течений в бегущем магнитном поле. Выводы о связи течений в постоянном и бегущем магнитном поле, полученные в гл. IX, не имеют пока прямого экспериментального подтверждения, а основываются на частном и приближенном решении основных уравнений магнитной гидродинамики.

Все рассмотренные здесь течения происходят в поперечном магнитном поле; в таких течениях обязательно появляются магнитогидродинамические эффекты двух типов: подавление турбулентных вихрей, которое обнаружено только в турбулентных течениях, и взаимодействие между осредненным течением и магнитным полем, которое имеет место как в ламинарном, так и в турбулентном течениях. Наложение этих двух эффектов усложняет физику взаимодействий внутри канала, но, с другой стороны, фактически упрощает исследование такого типа, поскольку оно позволяет всегда пренебрегать влиянием вязкости в центральной части канала. Однако более глубокое понимание физических явлений, особенно условий перехода, можно получить из совместных экспериментальных и теоретических исследований течений в постоянном продольном магнитном поле. Так как в таком течении осредненная скорость и магнитное поле параллельны, то взаимодействие между осредненной скоростью и полем отсутствует и существует лишь эффект подавления турбулентности. Таким образом, основное влияние поля будет всегда состоять в увеличении расхода при данном перепаде давления и в изменении профиля в центральной части канала, при котором он будет приближаться к параболическому. Возрастание расхода может быть значительным.

Явление турбулентности, изученное здесь, как и соответствующее явление в обычной гидродинамике, по-видимому, существует только тогда, когда жидкость имеет ненулевую вязкость и существует некоторое возмущение, вызывающее среднее течение. Если какое-либо из этих условий не выполняется, то установившаяся турбулент-

ность такого типа, как изучалась здесь, существовать не может. Основные уравнения магнитной гидродинамики, однако, допускают возможность существования других явлений, подобных турбулентности (например, сильные нелинейные колебания). В гл. VII мы интересовались условиями, при которых силы, возникающие от взаимодействия пульсаций электрического тока и магнитного поля, будут намного меньше сил, связанных с турбулентной конвекцией, и получили в качестве такого условия неравенство

$$\frac{\mu_0 \sigma^2 B_0^2 L^2}{\rho} \ll 1. \quad (10.2)$$

Отметим две интересные особенности этого критерия: в него не входит скорость жидкости, а вывод его не зависит от сжимаемости жидкости. При течении в каналах жидкостей или низкотемпературных ионизованных газов условие (10.2), по-видимому, всегда выполняется. Для условий, встречающихся в стабилизированных пинч-разрядах в высокотемпературной плазме левая часть выражения (10.2) может принимать значения от 10 до 100. Этот параметр получен из исследования уравнений как некий «коэффициент обратной связи»; он характеризует отношение магнитогидродинамических сил, которые возникают в результате возмущения, обусловленного движением, к силам, вызывающим это возмущение. Поэтому можно ожидать, что при достаточно больших значениях этого параметра в жидкости могут возникать самопроизвольные колебания или движение, сходное с турбулентностью, сопровождающееся переходом кинетической энергии в магнитную, и наоборот. Энергия, необходимая для поддержания такого движения в плазме, подвергающейся сжатию в магнитной ловушке, может отбираться от энергии, сообщенной ей при сжатии.

Все эти замечания, конечно, носят чисто гипотетический характер. Однако имеются указания, что явление такого типа уже встречалось в стабилизированных пинч-разрядах высокой энергии. Дальнейшее исследование в указанном направлении может дать интересные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bakhmeteff B. A., The Mechanics of Turbulent Flow, Princeton, 1936.
2. Batchelor G. K., «On the Spontaneous Magnetic Field in a Conducting Liquid in Turbulent Motion», Proc. Roy. Soc., London, A201, 405 (1950). (Имеется перевод в сборнике: Проблемы современной физики, вып. 2, ИЛ, 1954.)
3. Blake L. R., «AC and DC Conduction Pumps for Liquid Metals», Engineer, 202, 512, 541 (1956); «Conduction and Induction Pumps for Liquid Metals», Proc. IEE, 104, Pt. A, 49 (1957).
4. Chandrasekhar S., «The Invariant Theory of Isotropic Turbulence in Magnetohydrodynamics», Proc. Roy. Soc., London, Pt. I, A204, 435 (1950); Pt. II, A207, 301 (1951). (Имеется перевод в сборнике: Проблемы современной физики, вып. 2, ИЛ, 1954.)
5. Eckert E. R. G., Irvine T. F., Jr., «Incompressible Friction Factor, Transition and Hydrodynamic Entrance-Length Studies of Ducts with Triangular and Rectangular Cross Sections», Proc. Fifth Midwestern Conference on Fluid Mechanics, Ann Arbor, 1957, p. 122.
6. Hartmann J., «Hg-Dynamics I», Det Kgl. Danske Videnskab. Selskab., Mat.-fys. Medd., 15, No. 6 (1937).
7. Hartmann J., Lazarus F., «Hg-Dynamics II», Det Kgl. Danske Videnskab. Selskab., Mat.-fys. Medd., 15, No. 7 (1937) (см. статью 4 дополнения).
8. Hunsaker J. C., Rightmire B. G., Engineering Applications of Fluid Mechanics, New York, 1947.
9. Laufer J., Investigation of Turbulent Flow in a Two-Dimensional Channel, NACA Report 1053, G. P. O., Washington, 1951.
10. Lock R. C., «The Stability of the Flow of an Electrically Conducting Fluid between Parallel Planes under a Transverse Magnetic Field», Proc. Roy. Soc., London, A233, 105 (1955).
11. Millikan C. B., «Turbulent Flows in Channels and Circular Tubes», Proc. Fifth International Congress for Applied Mechanics, New York, 1939, p. 386.
12. Murgatroyd W., «Experiments on Magneto-Hydrodynamic Channel Flow», Phil. Mag., 44, 1348 (1953) (см. статью 5 дополнения).

13. Nikuradse J., «Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren», VDI Forschungsheft, 356 (1932). (Имеется перевод в сборнике: Проблемы турбулентности, М., 1936.)
14. Stuart J. T., «On the Stability of Viscous Flow between Parallel Planes in the Presence of a Coplanar Magnetic Field», Proc. Roy. Soc., London, A221, 189 (1954).
15. Watt D. A. «Electromagnetic Pumps for Liquid Metals», Engineering, 181, 264 (1956).

ДОПОЛНЕНИЕ

1. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ

Дж. Капур, Р. Джайн¹⁾

J. N. K a p u r, R. K. J a i n, Phys. Fluids, 5, No. 5, 589 (1962)

Рассматривается турбулентное течение несжимаемой электропроводной жидкости между двумя параллельными пластинами в присутствии постоянного внешнего магнитного поля, параллельного пластинами. Исходя из уравнений Рейнольдса для магнитогиродинамического течения, которые в конечном счете приводятся к трем уравнениям с семью неизвестными, можно получить некоторые выводы о распределении среднего давления и турбулентных пульсаций. В отличие от случая ламинарного течения, в данном случае магнитное поле влияет на распределение средней скорости через турбулентные пульсации и распределение среднего магнитного поля отлично от однородного.

Введение

Вследствие значительной ограниченности и противоречивости [1] теории пути смешения Прандтля [2], Пай [3] недавно предпринял попытку исследовать турбулентное течение с поперечным сдвигом между двумя параллельными пластинами, исходя непосредственно из уравнений Рейнольдса. Ему удалось представить распределение средней скорости в виде полинома от координаты, отсчитываемой от средней плоскости, с коэффициентами, выражающимися через два параметра. Эти два параметра зависят от числа Рейнольдса и могут быть получены из экспериментальных данных. Результаты Пая согласуются с экспериментами Лауфера [4]. Кроме того, указанный метод обладает некоторыми преимуществами по сравнению с методом, основанным на использовании логарифмического распределения скоростей. Позднее Пай [5] применил его к изучению турбулентного течения в трубе.

Мы постараемся распространить этот метод на случай магнитогиродинамических турбулентных течений с поперечным сдвигом. Если предположить, что мгновенные значения переменных параметров течения удовлет-

¹⁾ Department of Mathematics, University of Delhi, Delhi, India.

воряют уравнениям магнитной гидродинамики, то после осреднения можно получить восемь уравнений Рейнольдса с 17 неизвестными. Поскольку теперь мы имеем два основных распределения, а именно распределение средней скорости и распределение среднего магнитного поля, то для нахождения этих распределений в случае турбулентного течения с поперечным сдвигом теория пути смещения оказывается недостаточной. Необходимо сделать некоторые дополнительные предположения. С другой стороны, имея в виду успешные применения метода Пая в прошлом, мы будем предполагать (при отсутствии какого-либо эксперимента), что дополнительные параметры могут быть найдены из экспериментальных данных. Тогда удастся представить распределения средних величин и турбулентных пульсаций в виде полиномов от расстояния от средней плоскости.

В настоящей статье мы рассмотрим случай турбулентного течения между двумя параллельными пластинами, расположенными на расстоянии $2a$ друг от друга, в присутствии постоянного магнитного поля, параллельного пластинам. Для данной задачи число уравнений уменьшается до трех, а число неизвестных — до семи. Среднее магнитное поле, средняя скорость, напряжения взаимодействия и модифицированные напряжения Рейнольдса определяются в зависимости от четырех параметров, которые могут быть подсчитаны из экспериментальных данных. Получены также некоторые общие результаты по распределению среднего давления и турбулентных пульсаций. При отсутствии турбулентности средние распределения совпадают с распределениями, найденными Стюартом [6] для ламинарного случая. Задачи о течениях в трубе и в кольцевом зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами были изучены в других работах [7, 8] и могут служить основой для сравнения ламинарного и турбулентного случаев.

§ 1. Основные уравнения

Основные уравнения магнитной гидродинамики для несжимаемой электропроводной жидкости можно (пренебрегая токами смещения и т. д.) записать

В виде

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_l}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_l} + \nu \frac{\partial^2 v_l}{\partial x_j \partial x_j} + h_j \frac{\partial h_l}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_j^2}{\partial x_l}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h_l}{\partial t} + v_j \frac{\partial h_l}{\partial x_j} - h_j \frac{\partial v_l}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial^2 h_l}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_j} = 0, \quad (4)$$

где $l = 1, 2, 3$; $\lambda = 1/4\pi\sigma$; v_i — компоненты скорости; h_i — компоненты магнитного поля [$h_i = H_i/(4\pi\rho)^{1/2}$ и размерность h_i совпадает с размерностью скорости]; p — статическое давление и (x_1, x_2, x_3) — декартовы координаты точки. Начало координат расположено в плоскости симметрии. Ось x_1 совпадает с направлением среднего течения, а ось x_2 перпендикулярна к пластинам. Если уравнения (1)–(4) удовлетворяют мгновенные значения переменных параметров течения

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i, \quad h_i = \bar{h}_i + h'_i, \quad p = \bar{p} + p' \quad (5)$$

(где \bar{f} отмечает среднее значение f , а f' — турбулентную пульсацию f), то, подставляя (5) в (1)–(4) и осредняя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \bar{h}_i \bar{h}_j}{\partial x_j} - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}_j^2}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{h}_i^2}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial x_j} - \bar{h}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial^2 \bar{h}_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{h}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (9)$$

где

$$A_{ij} = \overline{v'_j h'_i} - \bar{h'_j v'_i} \quad (10)$$

и

$$B_{ij} = \overline{v'_i v'_j} - \overline{h'_i h'_j}. \quad (11)$$

Здесь A_{ij} — антисимметричный тензор второго ранга с тремя независимыми компонентами, а B_{ij} — симметричный тензор второго ранга с шестью независимыми компонентами.

Уравнения (6) — (9) являются основными уравнениями магнитогидродинамического турбулентного течения. Итак, мы имеем восемь уравнений с 17 неизвестными: три компоненты средней скорости \overline{v}_i , три компоненты среднего магнитного поля \overline{h}_i , одно среднее давление \overline{p} , одно турбулентное магнитное давление $\overline{h'^2_j}$, три компоненты напряжений взаимодействия A_{ij} и шесть компонент модифицированных рейнольдсовых напряжений B_{ij} . Решение приведенных выше уравнений в общем случае сопряжено с большими трудностями. Поэтому мы продолжим рассмотрение этого вопроса на основе определенных предположений в следующем параграфе.

§ 2. Постановка задачи

Предположим, что: а) среднее течение установившееся; б) $\overline{v}_i = [\overline{v}(x_2), 0, 0]$, $\overline{h}_i = [\overline{h}(x_2), 0, 0]$; в) $(\partial \overline{f} / \partial x_3) = 0$, $\overline{p} = \overline{p}(x_1, x_2)$; г) корреляции всех турбулентных пульсаций зависят только от x_2 и д) в направлении среднего течения приложено постоянное магнитное поле H_0 . Заменяя x_1 на x и x_2 — на y ; тогда при наших предположениях уравнения (8) и (9) удовлетворяются автоматически, а уравнения (6) и (7) дают

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} = - \frac{\partial B_{12}}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial y^2}, \quad (12)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} = - \frac{\partial B_{22}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{h^2}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{h_1'^2} + \overline{h_2'^2} + \overline{h_3'^2}), \quad (13)$$

$$\frac{\partial B_{23}}{\partial y} = 0, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \right) A_{12} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \overline{h}}{\partial y^2} \right), \quad (15)$$

$$\frac{\partial A_{32}}{\partial y} = 0, \quad (16)$$

Уравнения (12) — (16) должны быть проинтегрированы при граничных условиях, которые мы получим ниже.

Поскольку обе пластины неподвижны, поверхностные токи отсутствуют (независимо от того, электропроводны пластины или нет). Следовательно, на границах все компоненты магнитного поля непрерывны. Отсюда

$$h'_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

и

$$\bar{h} = h_0 \left[\equiv \frac{H_0}{(4\pi\rho)^{1/2}} \right] \quad \text{при } y = \pm a. \quad (17)$$

Кроме того, условие прилипания дает

$$v'_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{и} \quad \bar{v} = 0 \quad \text{при } y = \pm a. \quad (18)$$

Интегрируя (14) и (16) при этих граничных условиях, получаем

$$B_{23} = A_{32} = 0. \quad (19)$$

Отсюда перпендикулярные к направлению потока компоненты модифицированных рейнольдсовых напряжений и напряжений взаимодействия отсутствуют во всей области течения.

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, выразим уравнения (12), (13) и (15) в безразмерной форме. Пусть τ_0 — касательное напряжение на нижней пластине. Введем характерную скорость

$$U^* = \left(\frac{\tau_0}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (20)$$

Уравнения (12), (13) и (15) можно тогда записать в следующей безразмерной форме:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{dr}{d\eta} - \frac{1}{R^*} \frac{d^2 v}{d\eta^2} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{d\theta}{d\eta} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} (H^2 + \Phi) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} - R_M^* \left(\frac{d\psi}{d\eta} \right) = 0, \quad (23)$$

где

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad V = \frac{\bar{v}}{U^*}, \quad H = \frac{\bar{h}}{U^*},$$

$$\omega = \frac{\bar{p} - p_0}{\rho U^{*2}} = \omega(\xi, \eta, R^*, R_M^*) \quad (24)$$

и где $R^* = U^* a / \nu$ — число Рейнольдса, а $R_M^* = U^* a / \lambda$ — магнитное число Рейнольдса; p_0 — характерное давление, в качестве которого может быть выбрано, например, среднее давление в точке $\xi = 0$, $\eta = -1$. Характеристики турбулентных пульсаций в безразмерной форме имеют вид

$$r = \frac{B_{12}}{U^{*2}}, \quad \theta = \frac{B_{22}}{U^{*2}}, \quad \psi = \frac{A_{12}}{U^{*2}},$$

$$\Phi = \frac{\overline{h_1'^2 + h_2'^2 + h_3'^2}}{U^{*2}}. \quad (25)$$

Здесь V , H , r , θ , ψ и Φ являются функциями η , R^* и R_M^* . Граничные условия (17) и (18) могут быть записаны в виде

$$v = r = \theta = \psi = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \pm 1 \quad (26)$$

и

$$H = H_0 \quad \text{при} \quad \eta = \pm 1, \quad (27)$$

где

$$H_0 = \frac{h_0}{U^*}.$$

Кроме того,

$$\omega = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad \eta = -1. \quad (28)$$

Анализ уравнений (21) — (23) с граничными условиями (26) — (28) составляет основную задачу данной статьи. Хотя единственное решение получить невозможно, все же уравнения могут быть представлены в форме, позволяющей выявить некоторые общие свойства решения. В следующем разделе получено также решение, справедливость которого лучше всего можно установить посредством эксперимента.

§ 3. Решение задачи

Интегрируя уравнения (21) — (23), получаем

$$\omega + \theta + \frac{1}{2}(H^2 + \Phi) = A\xi + c, \quad (29)$$

$$\left(\frac{1}{R^*}\right)\left(\frac{dV}{d\eta}\right) - r = A\eta + B, \quad (30)$$

и

$$\left(\frac{1}{R_M^*}\right)\left(\frac{dH}{d\eta}\right) = \psi + D, \quad (31)$$

где A , B , C и D — постоянные интегрирования. Касательные напряжения на стенках $\eta = \pm 1$ (в безразмерной форме) выражаются так:

$$\begin{aligned} R^* &= \frac{dV}{d\eta} \quad \text{при } \eta = -1, \\ R^* &= -\frac{dV}{d\eta} \quad \text{при } \eta = 1. \end{aligned} \quad (32)$$

Используя граничные условия и уравнения (32), получаем

$$A = -1, \quad B = 0, \quad c = \frac{1}{2} H_0^2. \quad (33)$$

Поскольку D не может быть найдено из уравнения (31) с помощью имеющихся граничных условий, мы воспользуемся правдоподобным предположением о симметрии относительно η переменных осредненного течения V , ω и H . Это дает возможность определить D . Уравнение (31) показывает, что $dH/d\eta$ является нечетной функцией η , тогда как D , оставаясь постоянным, является четной функцией. Таким образом, мы заключаем, что $D = 0$. Следовательно, уравнения (29)—(31) могут быть записаны в виде

$$r - \eta = \frac{1}{R^*} \frac{dV}{d\eta}, \quad (34)$$

$$\frac{dH}{d\eta} = R_M^* \psi \quad (35)$$

и

$$\omega + \theta + \frac{1}{2}(H^2 - H_0^2 + \Phi) + \xi = 0. \quad (36)$$

Из этих уравнений путем сравнения течения Пуазейля проводящей жидкости (I) и турбулентного течения непроводящей жидкости между параллельными пластинами (II) можно сделать следующие выводы [(в дополнение к получаемым из уравнений (19)]. Среднее давление для течений I и II является линейной функцией ξ . Однако для течения II оно не постоянно ни в одном

сечении $\xi = \text{const}$, тогда как для течения I оно постоянно в любом поперечном сечении. Для течения II обнаруживается падение среднего давления в направлении от пластин к центру. Но там оно получается совершенно произвольным, тогда как в течении I магнитное поле не остается постоянным и зависит от турбулентных пульсаций. Из (34) и условия симметрии V следует, что r является нечетной функцией η , и поэтому

$$r = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0.$$

Интегрируя уравнение (34) от $\eta = -1$ до η , получаем

$$V = \frac{R^*}{2} (1 - \eta^2) + R^* \int_{-1}^{\eta} r d\eta. \quad (37)$$

При $r = 0$ соотношение (37) сводится к выражению для профиля скорости ламинарного течения Пуазейля. Поскольку скорость V симметрична относительно оси $\eta = 0$, то ее максимум $V_{\text{макс}}$ расположен на этой оси

$$V_{\text{макс}} = \frac{U_m}{U^*} = \frac{R^*}{2} + R^* \int_{-1}^0 r d\eta, \quad (38)$$

где U_m — максимальная скорость среднего течения, имеющая место на оси симметрии.

Если выразить $V(\eta, R^*, R_m^*)$ в виде степенного ряда по η , то можно показать, что для того, чтобы удовлетворить уравнению (34) и граничным условиям, этот ряд должен содержать в себе только три члена с четными степенями η . Чтобы иметь решение, включающее в себя как частный случай ламинарное течение, запишем выражение для $V(\eta, R^*, R_m^*)$ в виде

$$V = \frac{U_m}{U^*} (1 + a_2 \eta^2 + a_{2n} \eta^{2n}), \quad (39)$$

где n — произвольное целое число, большее или равное 2. Из (34), (39) и граничных условий найдем

$$a_2 = \frac{s-n}{n-1} \quad \text{и} \quad a_{2n} = \frac{1-s}{n-1}, \quad (40)$$

где

$$s = \frac{R^* U^*}{2U_m} = \frac{\tau_0}{2\mu (U_m/a)} = \frac{\tau_0}{\tau_p}, \quad (41)$$

т. е. s — отношение касательного напряжения на стенке τ_0 в турбулентном потоке к соответствующему касательному напряжению на стенке τ_p в ламинарном потоке с такой же максимальной скоростью U_m . Следовательно, профиль скорости запишется в виде

$$V(\eta, R^*, R_M^*) = \frac{U_m}{U^*} \left(1 + \frac{s-n}{n-1} \eta^2 + \frac{1-s}{n-1} \eta^{2n} \right), \quad (42)$$

а корреляция — в виде

$$r(\eta, R^*, R_M^*) = \eta [1 - \eta^{2(n-1)}] \left[\frac{n(s-1)}{s(n-1)} \right]. \quad (43)$$

Если $s = 1$, то уравнение (42) переходит в уравнение для ламинарного случая [6], а уравнение (43) дает тождественный нуль.

В турбулентном течении $s > 1$. В рассматриваемой задаче s зависит от R^* и R_M^* . Число n должно определяться из экспериментальных данных по распределению средней скорости. Таким образом, как и в течении II, распределение средней скорости и модифицированного напряжения Рейнольдса, несомненно, может быть определено.

Интегрируя уравнение (35) от $\eta = -1$ до η , получаем

$$H(\eta, R^*, R_M^*) = H_0 + R_M^* \int_{-1}^{\eta} \psi d\eta \quad (44)$$

и

$$H_{ext} = \frac{h_{ext}}{U^*} = H_0 + R_M^* \int_{-1}^0 \psi d\eta, \quad (45)$$

где h_{ext} — экстремальное значение магнитного поля, которое имеет место на оси. Пока нельзя сказать, будет ли H увеличиваться или уменьшаться по отношению к H_0 , так как знак ψ неизвестен. Поскольку среднее магнитное поле нельзя определить по известным параметрам n и

с, можно предполагать, что существует другой параметр, скажем l , характеризующий турбулентное течение и зависящий от R^* и R_M^* . Определим его как отношение внешнего магнитного поля к полю на оси симметрии

$$l = \frac{h_0}{h_{ext}}. \quad (46)$$

При отсутствии турбулентных пульсаций $l = 1$. Для турбулентных течений оно отличается от единицы. В какую сторону отклоняется l от единицы, можно будет решить только на основе экспериментальных данных, поскольку неясно, меньше или больше h_{ext} , чем h_0 .

Наиболее подходящим выражением для H , удовлетворяющим уравнениям (33), (34) и граничным условиям, является

$$H = \frac{h_{ext}}{U^*} (1 + a_{2p} \eta^{2p} + a_{2m} \eta^{2m}). \quad (47)$$

Из (35), (46), (47) и граничного условия для H получим

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{m(1-l)}{1-m}, \\ a_{2m} &= -\frac{p(1-l)}{1-m}. \end{aligned} \quad (48)$$

Следовательно, распределение среднего магнитного поля имеет вид

$$H = \frac{h_{ext}}{U^*} \left[1 + \frac{1-l}{1-m} (m\eta^{2p} - p\eta^{2m}) \right]. \quad (49)$$

Здесь p и m — различные целые числа, большие или равные 1. Поскольку (49) содержит три параметра, которые трудно определить из экспериментальных данных, и, кроме того, p и m совершенно произвольны, мы положим $p = 1$. Тогда (49) сведется к следующему выражению:

$$H = H_{ext} \left[1 + \frac{1-l}{1-m} (m\eta^2 - \eta^{2m}) \right], \quad (50)$$

где m — произвольное целое число, большее 1. Напряжение взаимодействия ψ может быть записано в виде

$$\psi = \frac{H_{ext}}{R_M^*} \frac{2m}{1-m} (1-l) \eta [1 - \eta^{2(m-1)}]. \quad (51)$$

Легко заметить, что когда $l = 1$, H постоянно и ψ автоматически исчезает. Ясно также, что найдены не все характеристики турбулентных пульсаций. Задача определения θ и Φ все еще остается нерешенной; решение станет возможным только тогда, когда дополнительные параметры будут получены экспериментально.

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K., Journ. Aeronaut. Sci., 17, 441 (1950).
2. Goldstein S., Modern Developments in Fluid Dynamics, Vol. 1, 2, Oxford, 1938.
3. Pai S. I., Journ. Appl. Mech., 20, 109 (1953).
4. Laufer J., Journ. Aero. Sci., 17, 277 (1950).
5. Pai S. I., Journ. Franklin Inst., 256, 337 (1958).
6. Stuart J. T., Proc. Roy. Soc., London, A221, 159 (1954).
7. Pai S. I., Journ. Appl. Phys., 25, 1205 (1954).
8. Globe S., Phys. Fluids, 2, 404 (1959).

2. ТУРБУЛЕНТНЫЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ

*Л. Наполитано*¹⁾

L. G. Napolitano, Rev. Mod. Phys., 32, № 4, 785 (1960)

Введение

Изучение свойств пограничного слоя на плоской пластинке при движении электропроводной жидкости в магнитном поле представляет большой теоретический и практический интерес. Россов получил решение в случае ламинарного движения; цель настоящей статьи — исследовать турбулентное движение.

Можно выделить следующие этапы анализа:

1) вывод основных уравнений турбулентного движения электропроводной жидкости с постоянными физическими свойствами;

2) выбор подходящей модели турбулентного пограничного слоя;

3) получение количественных результатов на основе выбранной модели.

В работе используются как методы решения и результаты, относящиеся к обычным турбулентным пограничным слоям (изложенные, например, в опубликованных в последнее время работах Таунсенда [1], Клаузера [2] и Феррари [3]), так и результаты развитой Чандрасекаром [4] элементарной теории магнитогидродинамической турбулентности.

В § 1 представлены основные магнитогидродинамические уравнения, линеаризованные относительно индуцированного магнитного поля. В § 2 эти уравнения записываются для случая турбулентного движения; здесь же формулируются и обсуждаются уравнения баланса кинетической энергии осредненного течения и турбулентной кинетической энергии. В § 3 устанавливается подходя-

¹⁾ University of Naples, Naples, Italy.

шая модель турбулентного пограничного слоя. В § 4 на основе этой модели выводятся справедливые для линеаризованной магнитогидродинамической турбулентности модифицированные «закон стенки» и закон поверхностного трения, содержащие две константы. В § 5 проводится вычисление этих двух констант методом, аналогичным методу Клаузера — Феррари [2, 3]. Результаты анализируются и обсуждаются в § 6.

§ 1. Линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики

Основные уравнения магнитной гидродинамики для жидкости с постоянными физическими свойствами, записанные в безразмерной форме, имеют вид

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\mathbf{v} \mathbf{v} + \frac{1}{\gamma M_0^2} p \mathbf{U} + \frac{\tau}{\text{Re}} \right) &= R_m P_m \mathbf{J} \times \mathbf{H}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= 4\pi R_m \mathbf{J}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \\ \mathbf{J} &= R_m (\mathbf{v} \times \mathbf{H} + \mathbf{E}),\end{aligned}\tag{1}$$

где Re — число Рейнольдса, равное $V_0 L / \nu$, R_m — магнитное число Рейнольдса, равное $\sigma V_0 \mu L$, и P_m — безразмерное магнитное давление, равное $\mu H_0^2 / \rho V_0^2$. Индексом «0» отмечены характерные величины соответствующих параметров; другие символы имеют обычный смысл.

Система уравнений (1) получена при следующих предположениях:

а) жидкость несжимаема и обладает постоянными физическими свойствами;

б) плотность свободных электрических зарядов и токи смещения пренебрежимо малы;

в) полное электрическое поле и конвективный электрический ток имеют тот же порядок величины, что и соответствующие поле и ток, обусловленные магнитогидродинамическим взаимодействием; внешнее электрическое поле отсутствует;

г) справедливо представление о «сплошной среде».

Обоснование, физический смысл, а также пределы применимости этих гипотез обсуждаются в нескольких работах.

После исключения из уравнений величин электрического поля \mathbf{E} и электрического тока \mathbf{J} и упрощения тензора вязких напряжений $\boldsymbol{\tau}$ применительно к рассматриваемому случаю система уравнений (1) сведется к следующим двум дифференциальным уравнениям относительно неизвестных \mathbf{v} и \mathbf{H} :

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{v}\mathbf{v} + \frac{\rho U}{\gamma M_0^2} - \frac{\boldsymbol{\tau}}{\text{Re}} + \frac{P_m}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{H} \right) \right] + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \left[R_m (\mathbf{H}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{H}) - \frac{1}{4\pi} \nabla \mathbf{H} \right] + R_m \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0,$$

Кроме того, естественно, оба вектора \mathbf{v} и \mathbf{H} имеют равную нулю дивергенцию.

Следует подчеркнуть, что уравнения Максвелла для электромагнитного поля при отсутствии гидродинамического поля линейны. При учете взаимосвязи этих двух полей добавляются нелинейные члены в уравнение для магнитного поля и вводятся дополнительные нелинейные члены в уравнение количества движения. Как будет видно ниже, это соображение имеет существенное значение при анализе турбулентности.

Уравнения (2) весьма сложны, и для их решения необходимы некоторые дополнительные упрощения. Одно из таких возможных упрощений — линеаризация по магнитному полю.

Пусть

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} + \epsilon \mathbf{h} + O(\epsilon^2), \quad (3)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор $\mathbf{H}_0/|\mathbf{H}_0|$ (H_0 — наложенное магнитное поле), а ϵ — величина порядка R_m . Поскольку во многих случаях, представляющих интерес для аэродинамики, параметр R_m мал, предполагается, что членами, имеющими порядок (по ϵ) выше первого, можно пренебречь. Далее, если предположить, что наложенное магнитное поле постоянно по величине и направлению,

то подстановка выражения (3) в уравнения (2) приведет к уравнениям

$$\nabla \cdot \left\{ \mathbf{v}\mathbf{v} + \frac{\rho U}{\gamma M_0^2} - \frac{\tau}{\text{Re}} + \frac{\varepsilon P_m}{4\pi} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) \mathbf{U} - (\mathbf{n}\mathbf{h} + \mathbf{h}\mathbf{n})] \right\} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \left[(\mathbf{n}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{n}) - \frac{1}{4\pi} \nabla \mathbf{h} \right] = 0. \quad (5)$$

Из этих уравнений следует, что для того, чтобы в уравнении количества движения сохранился член с магнитным полем, произведение εP_m должно иметь величину порядка единицы¹⁾.

Так как дивергенция векторов \mathbf{n} и \mathbf{h} равна нулю и, кроме того, $\nabla \times \mathbf{n} = 0$, то, используя простое векторное тождество, уравнение (5) можно проинтегрировать; в результате будем иметь

$$\nabla \times \mathbf{h} = 4\pi (\mathbf{v} \times \mathbf{n}). \quad (6)$$

Исходя из тех же соображений, можно получить

$$\nabla \cdot [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) \mathbf{U} - (\mathbf{n}\mathbf{h} + \mathbf{h}\mathbf{n})] = \mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{h}). \quad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) следует

$$\nabla [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) \mathbf{U} - (\mathbf{n}\mathbf{h} + \mathbf{h}\mathbf{n})] = 4\pi \mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) = 4\pi \mathbf{v}_n,$$

где \mathbf{v}_n — компонента вектора \mathbf{v} , перпендикулярная к наложенному магнитному полю.

Окончательно линеаризованные уравнения магнитной гидродинамики примут вид

$$\nabla \cdot \left\{ \mathbf{v}\mathbf{v} + \frac{\rho U}{\gamma M_0^2} \right\} - \frac{\nabla^2 \mathbf{v}}{\text{Re}} + P_m R_m \mathbf{v}_n + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (8)$$

¹⁾ Интересны и другие возможности, которые в данной работе не рассматриваются. Действительно, наряду с нестационарным членом уравнение количества движения содержит члены с давлением, вязкостью и магнитным полем, относительная величина которых по сравнению с конвективным членом определяется соответственно параметрами $|\gamma M_0^2|$, Re и εP_m . Порядок величины этих параметров определяет возможность пренебрежения соответствующими членами и получения различных упрощенных форм уравнения.

Таким образом, в результате линеаризации исчезают дополнительные нелинейные члены, и система основных уравнений оказывается распадающейся.

§ 2. Линеаризованные уравнения турбулентного течения в магнитной гидродинамике.

Уравнения энергии

Уравнения турбулентного движения жидкости можно получить, исходя из обычного предположения, что система (8) справедлива для мгновенных значений входящих в нее величин.

Положим $\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}'$ и $p = \langle p \rangle + p'$, где \mathbf{V} и $\langle p \rangle$ — осредненные значения вектора скорости и давления, а \mathbf{v}' и p' — соответствующие пульсационные составляющие. Угловые скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают осреднение. Подставляя эти соотношения в уравнения (8), получаем

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{v}') &= 0, \\ \nabla \cdot \left\{ \mathbf{V}\mathbf{V} + \mathbf{v}'\mathbf{v}' + \mathbf{V}\mathbf{v}' + \mathbf{v}'\mathbf{V} + \frac{\langle p \rangle + p'}{\gamma M_0^2} \mathbf{U} \right\} - \\ - \frac{\nabla^2}{\text{Re}} (\mathbf{V} + \mathbf{v}') + R_m P_m (\mathbf{V}_n + \mathbf{v}'_n) + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{V} + \mathbf{v}') &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

После осреднения этих уравнений и выделения угловыми скобками осредненных величин будем иметь

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0, \\ \nabla \cdot \left\{ \mathbf{V}\mathbf{V} + \langle \mathbf{v}'\mathbf{v}' \rangle + \frac{\langle p \rangle}{\gamma M_0^2} \mathbf{U} \right\} - \frac{\nabla^2 \mathbf{V}}{\text{Re}} + R_m P_m \mathbf{V}_n + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Линеаризованные уравнения турбулентного движения в магнитной гидродинамике имеют точно такой же вид, как и в обычной гидродинамике, за исключением, естественно, дополнительных членов (связанных с наличием магнитного поля), которые, однако, зависят только от распределения осредненной скорости. Этого и следовало ожидать, поскольку в уравнения, как было отмечено ранее, не вошли дополнительные нелинейные члены и, следовательно, не могли появиться дополнительные члены, связанные с пульсациями.

Теперь легко применить к уравнениям (10) известный в теории пограничного слоя метод оценки порядков величин отдельных членов. Предполагая давление во внешнем потоке постоянным, получаем в результате следующие безразмерные уравнения:

$$\begin{aligned} u_x + v_y &\approx 0, \quad p_y \equiv O(\delta), \\ uu_x + vu_y + tu &= \nu u_{yy} - \langle u'v' \rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

где все величины следует рассматривать как осредненные, а параметр

$$m = \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \quad (12)$$

зависит от величины наложенного магнитного поля H_0 и электропроводности жидкости σ и имеет размерность (время)⁻¹. Член $\langle u'v' \rangle$ соответствует обычным напряжениям Рейнольдса, возникающим вследствие наличия пульсаций скорости.

Для дальнейшего будет полезно выписать уравнения сохранения кинетической энергии среднего ($E_m = 1/2 V^2$) и пульсационного ($E_t = \langle 1/2 v'^2 \rangle$) движений.

Умножим уравнения (9) скалярно на \mathbf{v}' и осредним

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}' \cdot \nabla \cdot [\mathbf{V}\mathbf{v}' + \mathbf{v}'\mathbf{V}] \rangle + \langle \mathbf{v}' \cdot \nabla \cdot (\mathbf{v}'\mathbf{v}') \rangle + \\ + \frac{1}{\gamma M_0^2} \langle \mathbf{v}' \cdot \nabla p' \rangle - \frac{1}{\text{Re}} \langle \mathbf{v}' \cdot \nabla^2 \mathbf{v}' \rangle + \\ + R_m P_m \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'_n \rangle + \left(\mathbf{v}' \cdot \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \right) = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что это уравнение можно привести к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \nabla E_t + \nabla \cdot \left[\langle \mathbf{v}' \left(p' + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \right) \rangle \right] + \langle \mathbf{v}' \mathbf{v}' \rangle : \nabla \mathbf{V} - \\ - \text{Re}^{-1} \left[\nabla^2 E_t + \sum_i \sum_j \left\langle \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right\rangle^2 \right] + R_m P_m \langle (v'_n)^2 \rangle = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

выражающему баланс турбулентной энергии для стационарного движения. Смысл первых четырех слагаемых в этом уравнении известен [1, 3]. Это — соответственно конвективный член, диффузионный член, член, описы-

вающий генерацию турбулентной энергии, и диссипативный член. Новым является последний член. Этот член учитывает дополнительную диссипацию турбулентной энергии, обусловленную наличием магнитного поля. Физически такой эффект можно объяснить тем, что силовые линии магнитного поля оказывают противодействие пересечению их электропроводной жидкостью, так что некоторая часть кинетической энергии турбулентного движения должна быть израсходована на совершение работы по преодолению сил магнитогидродинамического сопротивления.

Чтобы получить уравнение сохранения кинетической энергии осредненного движения $\frac{1}{2}V^2 = E_m$, следует умножить уравнение (9) скалярно на \mathbf{V} и осреднить результат

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \cdot \left\{ \mathbf{V}\mathbf{V} + \langle \mathbf{v}'\mathbf{v}' \rangle + \frac{1}{\gamma M_0^2} \langle p \rangle \mathbf{U} \right\} - \mathbf{V} \frac{\nabla^2 \mathbf{V}}{\text{Re}} + \\ + R_m P_m \mathbf{V}_n \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V}_n \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0.$$

В стационарном случае это уравнение после преобразования, уже применявшегося выше, примет вид

$$\mathbf{V} \cdot \nabla E_m + \nabla \cdot (\langle \mathbf{v}'\mathbf{v}' \rangle \cdot \mathbf{V}) + \frac{1}{\gamma M_0^2} \nabla \cdot (p\mathbf{V}) - \\ - \langle \mathbf{v}'\mathbf{v}' \rangle : \nabla \mathbf{V} - \text{Re}^{-1} \left[\nabla^2 E_m - \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] + \\ + R_m P_m \mathbf{V}_n \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (14)$$

Здесь также сохранены все особенности соответствующего уравнения энергии обычной гидродинамики. Кроме того, в этом уравнении снова появился дополнительный член, обусловленный обменом энергией между полем скоростей и магнитным полем.

Вернемся теперь к уравнениям (11), описывающим турбулентный пограничный слой в линеаризованной магнитной гидродинамике. В линейном приближении единственным пульсационным членом является член, соответствующий напряжениям Рейнольдса. Чтобы связать этот пульсационный член с характеристиками осреднен-

ного движения, необходимо сначала выяснить существенные физические особенности рассматриваемого явления и установить степень его отличия от обычной турбулентности. Такой анализ дан в следующем параграфе, там же описывается соответствующая «модель» процесса диссипации, которая позволяет провести в дальнейшем количественное исследование.

§ 3. Построение модели турбулентного пограничного слоя

Современные представления о турбулентности основаны на фундаментальной физической идее о передаче энергии от крупных вихрей к мелким [1, 3]. Эта идея была недавно распространена Чандрасекаром [4] на магнитогидродинамическую турбулентность.

В обычной турбулентности принято следующее предположение. Вначале энергия поступает к фурье-компонентам поля скоростей, обладающим минимальными волновыми числами (наиболее крупные вихри), затем она передается к компонентам с большими волновыми числами и, наконец, вследствие вязкой диссипации превращается в тепло при наибольшем волновом числе. Передача энергии от компоненты с одним волновым числом к компоненте с другим волновым числом осуществляется только благодаря нелинейным связям между различными фурье-компонентами поля скоростей (эта нелинейность заложена в инерционных членах уравнения движения). Скорость, с которой кинетическая энергия единицы объема, приходящаяся на единицу интервала волновых чисел при волновом числе k' , переходит в кинетическую энергию при волновом числе k'' ($> k'$), дается вероятностью перехода $Q_1(v, k'; v, k'')$. Скорость изменения плотности энергии при любом волновом числе k определяется суммой потока энергии от компонент с более низкими волновыми числами, потока энергии к компонентам с более высокими волновыми числами и потерь энергии вследствие вязкой диссипации.

Согласно Чандрасекару, эти представления можно распространить на магнитогидродинамическую турбу-

лентность следующим образом. Прежде всего в данном случае следует принимать во внимание иной тип турбулентной энергии, энергию магнитного поля, связанную с турбулентным движением; поэтому при каждом волновом числе приходится иметь дело с двумя уравнениями энергии. Во-вторых, в уравнениях движения и уравнении для магнитного поля наряду с инерционными членами появляются еще другие нелинейные члены, так что становятся возможными дополнительные взаимосвязи между фурье-компонентами: кинетическая и магнитная энергии могут переходить одна в другую. Однако непосредственная передача магнитной энергии от компоненты с одним волновым числом к компоненте с другим волновым числом невозможна вследствие линейности уравнений Максвелла. Чандрасекар ввел еще две вероятности перехода: $Q_3(v, k'; h, k'')$ (скорость, с которой кинетическая энергия единицы объема, приходящаяся на единицу интервала волновых чисел при волновом числе k' , переходит в магнитную энергию при волновом числе $k'' > k'$) и $Q_2(h, k'; v, k'')$ (скорость, с которой магнитная энергия единицы объема, приходящаяся на единицу интервала волновых чисел при волновом числе k' , переходит в магнитную энергию при волновом числе $k'' > k'$). При любом волновом числе k скорость изменения плотности кинетической энергии теперь определяется суммой следующих пяти членов:

- 1) кинетической энергии, поступающей от компонент с более низкими волновыми числами;
- 2) кинетической энергии, передающейся к компонентам с более высокими волновыми числами;
- 3) магнитной энергии, поступающей от компонент с более низкими волновыми числами и переходящей в кинетическую при волновом числе k ;
- 4) кинетической энергии при волновом числе k , переходящей в магнитную при более высоких волновых числах;
- 5) вязкой диссипации энергии.

Соответствующая скорость изменения плотности магнитной энергии при волновом числе k определяется суммой трех членов:

1) кинетической энергии, поступающей от компонент с более низкими волновыми числами и переходящей в магнитную энергию при волновом числе k ;

2) магнитной энергии при волновом числе k , переходящей в кинетическую энергию при более высоких волновых числах, и

3) диссипации магнитной энергии вследствие наличия электросопротивления (джоулево тепло).

Чандрасекар показал, что вероятности переходов можно с достаточными основаниями представить в виде

$$Q_s(k', k'') = \text{const} \left[\frac{k'}{k''^{3/2}} \right] \times \\ \times [iF(k')F^{1/2}(k'') + jG(k')G^{1/2}(k'')], \quad (15)$$

где $F(k)$ и $G(k)$ — соответственно спектральные плотности турбулентной кинетической и магнитной энергий, $i = 1, j = 0$ для $s = 1$; $i = 0, j = 1$ для $s = 2$; $i = 1, j = 1$ для $s = 3$.

На основании этих формул и результатов Чандрасекара можно сделать следующие выводы, относящиеся к случаю линеаризованной магнитогидродинамической турбулентности:

1) спектральная плотность турбулентной магнитной энергии при любом волновом числе на порядок величины ниже, чем спектральная плотность турбулентной кинетической энергии;

2) поэтому, как показывает уравнение (15), вероятность обмена турбулентной кинетической и магнитной энергией мала по сравнению с вероятностью перехода турбулентной кинетической энергии от компоненты с одним волновым числом к компоненте с другим волновым числом;

3) при любом волновом числе спектральная плотность кинетической энергии при наличии магнитного поля понижается.

Первые два утверждения почти очевидны и вытекают из отмеченного выше отсутствия в основных уравнениях других нелинейных членов, кроме инерционных. Третье утверждение может быть строго доказано путем

линеаризации теории Чандрасекара¹⁾). Для эвристического обоснования можно принять, что уравнение сохранения, с помощью которого находится спектральное распределение энергии, обязательно имеет такую же структуру, как и уравнения (8). Тогда оно будет содержать дополнительный диссипативный член, связанный с джоулевой диссипацией, и приведет, следовательно, к более низким величинам спектральной плотности энергии.

В заключение можно нарисовать следующую картину потока энергии в линеаризованной магнитогидродинамической турбулентности. Обмен турбулентной кинетической энергией может происходить только между компонентами с различными волновыми числами, поскольку все другие возможные обмены имеют намного меньшую вероятность. При любом волновом числе k скорость изменения спектральной плотности энергии определяется суммой энергии, поступающей от компонент с более низкими волновыми числами, энергии, передаваемой компонентам с более высокими волновыми числами и потерями энергии, обусловленными вязкой и джоулевой диссипацией.

Продолжим рассмотрение и исследуем турбулентное обтекание тел. Если жидкость непроводящая, то существуют две области с различными «характерными временами установления»: внутренний слой и внешний. В первой области существует некоторая форма статистического локального квазиравновесия, тогда как во второй преобладают условия «динамического равновесия», которое приводит к самоподдерживающимся течениям. Энергия извлекается из осредненного течения градиентом напряжений Рейнольдса, переносится во внутренний слой и преобразуется в турбулентную энергию путем совершения работы осредненным течением против напряжений Рейнольдса. Во внутреннем слое эта внесенная турбулентная энергия почти вся диссипируется вследствие вязкости, и лишь небольшое количество энергии возвращается обратно во внешний слой.

Если жидкость электропроводна, то, как показывают уравнения энергетического баланса [13, 14], влияние маг-

¹⁾ Автор предполагает сделать это в ближайшем будущем.

нитного поля на описанную выше схему переноса энергии будет двояким. Во-первых, обмен энергией между осредненным течением и магнитным полем изменяет приток энергии к внутреннему слою. Во-вторых, уже видоизмененная подводимая турбулентная энергия диссипирует под действием и вязкости и магнитного поля, так что в этом случае потери за счет вязкой диссипации у стенки составляют меньшую часть подводимой энергии.

Подвод турбулентной энергии к внутреннему слою уменьшается, поскольку взаимодействие между осредненным течением и магнитным полем во внешнем слое приводит к диссипации средней кинетической энергии. Поэтому уменьшение местного коэффициента поверхностного трения вызывается двумя сопутствующими факторами, обусловленными наличием магнитного поля — диссипацией средней кинетической энергии во внешнем слое и диссипацией турбулентной кинетической энергии во внутреннем слое.

Уравнение баланса турбулентной энергии позволяет сделать еще один важный вывод, который окажется существенным для дальнейшего количественного анализа. Дополнительный магнитный член, появляющийся в этом уравнении, умножается на число $R_m P_m$, которое, по предположению, имеет порядок единицы. Тогда дополнительное «характерное время», обусловленное наличием магнитного поля, по порядку величины будет близко к характерному времени при отсутствии магнитного поля. Этот факт оправдывает фундаментальное предположение о том, что даже в рассматриваемом случае внутренний слой находится в статистически квазиравновесном состоянии. Вполне очевидно, что это равновесие определяется теперь балансом генерации турбулентной энергии и вязкой и магнитной диссипации.

Вывод: в линеаризованной магнитной гидродинамике оправдано использование двухслойной модели турбулентной диссипативной области и предположения о том, что во внутренней и внешней областях преобладают соответственно равновесные условия и условия типа возмущений. Принятая модель линеаризованной магнито-

гидродинамической турбулентности служит основой для развития количественного анализа в последующих параграфах.

§ 4. Законы стенки и поверхностного трения

В настоящем параграфе с помощью рассмотренной выше модели двух слоев получены модифицированные формы закона стенки и закона поверхностного трения.

Поскольку во внутренней области имеется статистическое локальное квазиравновесие, скорость u может зависеть только от величин ρ , ν , y , m и τ_0 , из которых можно образовать следующие безразмерные комбинации:

$$\zeta = \frac{u^+ y}{\nu}, \quad \chi = \frac{m y}{u^+}. \quad (16)$$

Здесь $u^+ = (\tau_0/\rho)^{1/2}$, а τ_0 — касательное напряжение на стенке. Следовательно, во внутренней области профиль скорости можно представить в виде

$$\frac{u}{u^+} = F(\zeta, \chi), \quad (17)$$

где F — пока произвольная функция; чтобы получить для нее явное выражение, необходимо сначала рассмотреть профиль скорости во внешней области.

Как указывалось, эта область характеризуется тем, что при достаточно больших числах Рейнольдса влиянием молекулярного переноса можно пренебречь. Тогда из уравнения движения следует, что напряжение Рейнольдса $\langle u'v' \rangle$ по существу является функцией только двух независимых переменных $\eta = y/l_0(x)$ и $\sigma = mx/U_0$, где $l_0(x)$ — соответствующий масштаб длины. Приняв обычное предположение, что аналогичная функциональная зависимость для профилей скоростей вытекает из уравнений движения и неразрывности [1—3], мы заключаем, что во внешней области имеет место зависимость

$$u - U_1 = u_0 G(\eta, \sigma), \quad \text{причем } G(+\infty, \sigma) = 0, \quad (18)$$

где $U_1 = U_0(1-\sigma)$ — скорость свободного потока, $u_0(x)$ — подходящий масштаб скорости. Чтобы получить функциональное выражение для F , постулируем теперь суще-

ствование области «перекрытия», где справедливы одновременно уравнения (17) и (18), и поэтому должно выполняться равенство

$$u^+ F(\zeta, \chi) = U_1 + u_0 G(\eta, \sigma). \quad (19)$$

Необходимое, но недостаточное условие выполнения этого равенства заключается в том, чтобы между двумя парами независимых переменных (ζ, χ) и (η, σ) существовали определенные соотношения.

Предположив, что масштаб длины пропорционален толщине пограничного слоя δ , а $u_0(x) = u^+$, получим

$$\zeta = R\eta, \quad \chi = \frac{\sigma\eta}{H}, \quad (20)$$

где

$$R = \frac{u^+\delta}{v} = R(x), \quad H = \frac{u^+x}{U_0\delta} = H(x). \quad (21)$$

Тогда уравнение (19) принимает вид

$$F\left(R\eta, \frac{\sigma\eta}{H}\right) = f(R, H) + G(\eta, \sigma),$$

где $f(R, H) = U_1/u^+$. Было установлено, что нельзя удовлетворить этому соотношению подходящим выражением для F , которое переходило бы в известное выражение при $\sigma = 0$ (непроводящая жидкость), если не принять, что само σ мало. В этом случае, если пренебречь высокими степенями σ , можно записать соответственно для внутренней и внешней областей:

$$\begin{aligned} \frac{u}{u^+} &= F_0(\zeta_0) + \chi_0 F_1(\zeta_0), \\ \frac{u - U_1}{u^+} &= G_0(\eta_0) + \sigma G_1(\eta_0), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\zeta_0 = \frac{u_0^+ y}{v}, \quad \chi_0 = \frac{m y}{u_0^+}, \quad \eta_0 = \frac{\eta^+ y}{\delta_0}, \quad (23)$$

здесь индексом «0» отмечены величины, соответствующие $\sigma = 0$ ($m = 0$), а η^+ есть величина η при $y = \delta_0$. Установлено, что из предположения о том, что σ много меньше единицы, следует, что значение χ_0 также весьма мало;

как будет показано ниже, максимальная величина χ_0 равна приблизительно $(1/25)\sigma$.

Учтем теперь, что с той же степенью приближения, по σ :

$$\frac{U_1}{u^+} = \frac{U_0}{u_0^+} \left[1 - \sigma \left(1 + \frac{u_1^+}{u_0^+} \right) \right], \quad (24)$$

где, как это формально всегда можно записать,

$$u^+ = u_0^+ \left(1 + \frac{\sigma u_1^+}{u_0^+} \right).$$

Требование, чтобы два различных выражения для профиля скоростей совпадали внутри области перекрытия, тогда эквивалентно следующим двум уравнениям:

$$F_0(\zeta_0) = \left(\frac{U_0}{u_0^+} \right) + G_0(\eta_0), \quad (25)$$

$$F_1(\zeta_0) = \frac{H_0}{\eta_0} \left[G_1(\eta_0) - \frac{U_0}{u_0^+} \left(1 + \frac{u_1^+}{u_0^+} \right) \right],$$

где параметр $H_0 = u_0^+ x / U_0 \delta_0^2$ теперь является константой. Из первого уравнения следует известное соотношение

$$F_0 = k^{-1} [\ln \zeta_0 + A], \quad G_0 = k^{-1} [\ln \eta_0 + A']. \quad (26)$$

Второе уравнение удовлетворяется тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} F_1(\zeta_0) &= \text{const} = B, \\ \frac{U_0}{u_0^+} \left[1 + \left(\frac{u_1^+}{u_0^+} \right) \right] &= \text{const} = k_2, \end{aligned} \quad (27)$$

откуда следует, что

$$G_1(\eta_0) = \left(\frac{B}{H_0} \right) \eta_0 + k_2. \quad (28)$$

Необходимо отметить, что второе из уравнений (27), вытекающее из гипотезы о существовании зоны перекрытия, является ключевым моментом настоящего приближения. Нет необходимости говорить о том, что оно не может быть доказано теоретически и что только сравне-

нием с экспериментом можно убедиться в его правильности.

Комбинируя надлежащим образом предшествующие уравнения, можно получить следующие модифицированные законы стенки и поверхностного трения, верные при $\sigma \ll 1$:

закон стенки

$$\frac{u}{u^+} = \frac{1}{k} \left[\ln \frac{u_0^+ y}{\nu} + A \right] + B \frac{my}{u_0^+} \quad (B = \text{const}); \quad (29)$$

закон поверхностного трения

$$\frac{U_1}{u^+} = \frac{1}{k} \left[\ln \frac{u_0^+ \delta_0}{\nu} + A - A' \right] - k_2 \frac{mx}{U_0} \quad (k_2 = \text{const}), \quad (30)$$

где константы k , A и A' — те же самые, что фигурируют в известных законах гидродинамики.

Константы B и k_2 пока произвольны. Они будут определены в следующем параграфе. Однако сначала покажем, как закон стенки (29) согласуется с аналогичным законом, получаемым из уравнения сохранения энергии вблизи стенки.

Баланс турбулентной кинетической энергии вблизи стенки выражается следующим образом:

$$\langle u'v' \rangle u_y + \nu \sum_i \sum_j \left(\left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle \right)^2 + m \langle u'^2 \rangle = 0, \quad (31)$$

где первый член описывает генерацию турбулентной кинетической энергии E_t , а два последних — соответственно вязкую и «магнитную» диссипацию.

По-видимому, будет оправданным предположить, что

$$\begin{aligned} \langle u'v' \rangle &= -\alpha_1 E_t, \quad \langle u'^2 \rangle = \alpha_2 E_t, \\ \sum_i \sum_j \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle^2 &= \frac{\alpha_3 E_t}{\lambda^2}, \end{aligned} \quad (32)$$

где α_i положительны, а λ имеет размерность длины (так называемый микромасштаб турбулентности).

В случае непроводящей жидкости величина $\lambda^2/(\nu y/u^+)$ является константой. В рассматриваемом случае логично

предположить, что она является функцией безразмерного параметра $\chi = \tau y / u^+$, так что при малых χ можно записать

$$\lambda^2 = \frac{1}{\alpha_4} \left(\frac{y v}{u^+} \right) \left[1 + \alpha_5 \left(\frac{m y}{u^+} \right) \right]. \quad (33)$$

После подстановки соотношений (32) и (33) в уравнение (31) получим

$$\frac{u_y}{u^+} = \frac{\alpha_3 \alpha_4}{\alpha_1} \frac{1}{y} + \frac{\alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5}{\alpha_1} \frac{m}{u^+},$$

откуда после интегрирования следует уравнение (29), в котором

$$B = \frac{\alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5}{\alpha_1}. \quad (34)$$

Поэтому можно предположить, что существует внутренняя непротиворечивость установленных выражений для закона стенки и закона поверхностного трения.

§ 5. Определение констант, появляющихся в модифицированных законах

Для вычисления констант k_2 и B , фигурирующих в законе стенки и законе поверхностного трения, используется метод Клаузера — Феррари [2, 3]. По существу метод состоит в определении серии «ламинарных» профилей скорости с ненулевой скоростью на стенке для внешней области и сопряжения их с распределением скоростей во внутренней области путем удовлетворения в точке сопряжения условий непрерывности скорости, ее производной и кинематического коэффициента турбулентной вязкости.

Рассмотрим сначала внутреннюю область. Профиль скорости дается формулой (29). Чтобы подсчитать коэффициент турбулентной вязкости $\varepsilon = \tau / u_y$, необходимо предварительно определить напряжение трения τ . Из уравнения количества движения, записанного в форме

$$u u_x + v u_y + t u = \left(\frac{\tau}{\rho} \right)_y,$$

вытекает, что если во внутренней области пренебречь членами, содержащими квадрат и более высокие степени расстояния от стенки, то напряжение трения будет постоянно и равно своему значению на стенке τ_0 . Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{\tau}{u_y} = \frac{\tau_0}{u_y} = k \left(\frac{yu^+}{\nu} \right) \left[1 - kB \left(\frac{my}{u_0^+} \right) \right]. \quad (35)$$

Рассмотрим теперь внешнюю область, где, по предположению, можно пренебречь влиянием молекулярного переноса. Основные уравнения имеют вид

$$uu_x + vu_y + wu = \varepsilon u_{yy}, \quad u_x + v_y = 0, \quad (36)$$

где теперь коэффициент $\varepsilon = \tau/u_y$ является функцией только x . Функциональная зависимость для ε должна быть найдена из условия, что в этой области сохраняется некоторое подобие, т. е. профили скорости могут быть представлены серией универсальных функций, зависящих от переменной $\sigma = mx/U_0$. Можно показать, что из этого условия вытекает следующее выражение для ε :

$$\varepsilon = h\rho U_0 \delta_0^+ [1 + \sigma a] \quad (a = \text{const}), \quad (37)$$

где δ_0^+ — толщина вытеснения при отсутствии магнитного поля и h — константа.

Действительно, пусть функция тока ψ , определяемая равенствами $\psi_y = u$, $\psi_x = -v$, представляется в виде

$$\psi = l_0(x) U_0 [f_0(\eta_0) + \sigma f_1(\eta_0) + \dots], \quad (38)$$

где

$$\eta_0 = \frac{y}{l_0(x)}, \quad (39)$$

здесь $l_0(x)$ — масштаб длины. Подставляя выражения для компонент скорости, найденные из уравнения (38), группируя члены по степеням σ и пренебрегая членами с σ^2 , получаем следующие два уравнения для f_0 и f_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0 x}{U_0 l_0^2} f_0''' + \frac{l_0' x}{l_0} f_0 f_0'' &= 0, \\ f_1' f_0' - \frac{l_0' x}{l_0} [f_0 f_1'' + f_1 f_0''] - f_1 f_0'' + f_0' &= \frac{\varepsilon_0 x}{U_0 l_0^2} f_1''' + \frac{\varepsilon_1 x}{U_0 l_0^2} f_0''', \end{aligned} \quad (40)$$

где штрихи означают дифференцирование по соответствующей переменной и где мы положили $\varepsilon = \varepsilon_0 + \sigma \varepsilon_1$.

Для того чтобы уравнения (40) были совместны с уравнением (38), необходимо, чтобы их коэффициенты были постоянными. Первое из уравнений (40) определяет связь между ε_0 и l_0 . Поскольку ε_0 представляет собой коэффициент турбулентной вязкости при отсутствии магнитного поля, то можно положить (ср. Клаузер [2]), что

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} U_0 (l_0') = h_p U_0 \delta_0^+, \quad (41)$$

где $h = 0,018$. Если учесть требования подобия, то из второго уравнения (40) следует, что $l_0' x / l_0 = \text{const} = \alpha_1$ и ε_1 , как это видно из (37), пропорционально ε_0 . Первое условие является более сильным, так как оно удовлетворяется только при достаточно больших числах Рейнольдса $U_0 x / \nu$, когда $\delta_0^+ \approx x^n$ и $\alpha_1 = 1/2 (n + 1)$.

Итак, характеристики внешней области могут быть определены из решения следующей системы уравнений:

$$f_0''' + f_0 f_0'' = 0, \quad (42a)$$

$$\frac{2}{n+1} [f_1' f_0' - f_1 f_0'' + f_0'] - f_0 f_1'' - f_1 f_0'' = f_1''' + \frac{2a}{n+1} f_0'' \quad (42b)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} f_0'(+\infty) &= 1, & f_1'(+\infty) &= -1, \\ f_0(0) &= 0, & f_1(0) &= 0, \\ f_0'(0) &= \alpha_0, & f_1'(0) &= \alpha_1. \end{aligned} \quad (43)$$

Первые два граничных условия следуют из условия сопряжения внешней области с невязким течением. Последнее задает отличную от нуля скорость на стенке.

Профили скорости определяются соотношением

$$\frac{u}{U_0} = f'(\eta_0) + \sigma f_1'(\eta_0) \quad (44)$$

и зависят от трех параметров: α_0 , α_1 и $P = 2a/(n + 1)$. Последний параметр, а также неизвестные константы в выражении для скорости во внутренней области и в выражении для закона поверхностного трения должны

определяться из условий непрерывности в точке сопряжения профиля (44) с профилем скорости во внутренней области.

Точка, в которой необходимо проводить сопряжение, также заранее неизвестна. Пусть $y = y_0 + \sigma y_1$ — ордината точки Q , в которой проводится сопряжение; y_0 — ордината точки, в которой проводилось бы сопряжение при отсутствии магнитного поля. Точка Q , по предположению, лежит внутри области перекрытия.

Если считать, что Q принадлежит к внутренней области, то она определяется значением $\zeta = \zeta_0 + \sigma \zeta_1$, где

$$\zeta_0 = \frac{u_0^+ y_0}{\nu}, \quad \zeta_1 = \frac{u_0^+ y_1}{\nu}, \quad (45)$$

так что скорость, градиент скорости u_y и коэффициент турбулентной вязкости равны соответственно

$$\begin{aligned} & \frac{u_0^+}{k} [\ln \zeta_0 + A] + \sigma \left\{ \frac{u_1^+}{k} (\ln \zeta_0 + A) + \frac{u_0^+ \zeta_1}{k \zeta_0} + B \frac{u_0^+ y_0}{H_0 \delta_0} \right\}, \\ & \frac{u_0^{+2}}{k \nu \zeta_0} + \sigma \left\{ \frac{u_1^+ u_0^+}{k \nu \zeta_0} + \frac{B u_0^+}{H_0 \delta_0} - \frac{u_0^{+2} \zeta_1}{\nu \zeta_0 k \zeta_0} \right\}, \\ & k \zeta_0 + \sigma \left\{ k \zeta_1 - \zeta_0 \frac{k B}{H_0} \frac{y_0}{\delta_0} + k \zeta_0 \frac{u_1^+}{u_0^+} \right\}, \end{aligned} \quad (46)$$

причем здесь предполагается, что $u^+ = u_0^+ + \sigma u_1^+$, и принято во внимание, что

$$\sigma = \frac{m x}{U_0} = H_0 \left(\frac{m y_0}{u_0^+} \right) \left(\frac{\delta_0}{y_0} \right). \quad (47)$$

Если считать, что точка Q принадлежит внешней области, то она определяется значением $\eta = \eta_0 + \sigma \eta_1$, где

$$\eta_0 = \frac{\eta^+ y_0}{\delta_0}, \quad \eta_1 = \frac{\eta^+ y_1}{\delta_0}; \quad (45a)$$

здесь η^+ есть значение η при $y = \delta_0$. Скорость, градиент скорости u_y и коэффициент турбулентной вязкости

равны соответственно

$$\begin{aligned} U_0 \{f'_0(\eta_0) + \sigma [\eta_1 f''_0(\eta_0) + f'_1(\eta_0)]\}, \\ \frac{U_0 \eta^+}{\delta_0} \{f''_0(\eta_0) + \sigma [\eta_1 f'''_0(\eta_0) + f''_1(\eta_0)]\}, \\ \frac{\hbar U_0 \delta_0^+}{v} \{1 + \sigma P\}. \end{aligned} \quad (46a)$$

В точке сопряжения Q величины, определяемые формулами (46) и (46a), должны совпадать при любом σ . Это условие приводит к следующим двум системам уравнений:

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \frac{u_0^+ y_0}{v} = (C_0)^{1/2} \frac{R_0 \eta_0}{K_0}, \\ \ln \zeta_0 + A &= \frac{k f'_0(\eta_0)}{(C_0)^{1/2}}, \\ (k \zeta_0)^{-1} &= C_0^{-1} \left(\frac{K_0}{R_0} \right) f''_0(\eta_0), \\ k \zeta_0 &= \hbar R_0, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} (C_0)^{1/2} &= \left(\frac{C_{f,0}}{2} \right)^{1/2} = \frac{u_0^+}{U_0}, \quad R_0 = \frac{U_0 \delta_0^+}{v}, \\ K_0 &= \eta^+ \frac{\delta_0^+}{\delta_0} = \int_0^\infty (1 - f'_0) d\eta, \end{aligned} \quad (49)$$

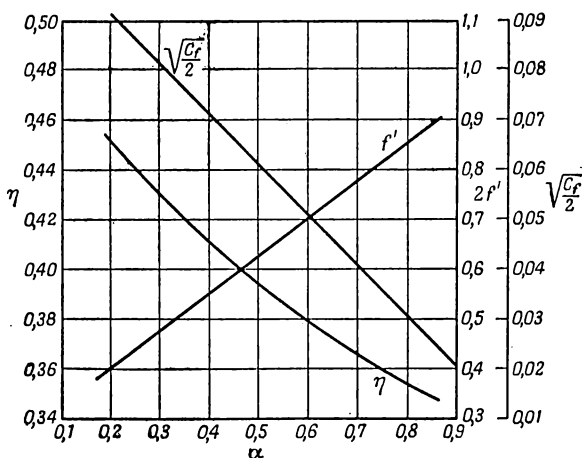
и

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{\zeta_0 \eta_1}{\eta_0}, \\ \frac{u_1^+}{k u_0^+} (\ln \zeta_0 + A) + \frac{1}{k} \frac{\zeta_1}{\zeta_0} + \frac{B}{H_0} \frac{\eta_0}{\eta^+} &= \\ &= (C_0)^{-1/2} = \left[\eta_0 \frac{\zeta_1}{\zeta_0} f''_0(\eta_0) + f'_1(\eta_0) \right], \\ \frac{u_1^+}{u_0^+ \zeta_0} + \frac{Bk}{H_0 R_0} - \frac{1}{\zeta_0} \frac{\zeta_1}{\zeta_0} &= \frac{k K_0}{C_0 R_0} [\eta_1 f'''_0(\eta_0) + f''_1(\eta_0)], \\ \frac{k \zeta_1}{\zeta_0} - \frac{k B}{H_0} \frac{\eta_0}{\eta^+} + k \frac{u_1^+}{u_0^+} &= \frac{\hbar R_0}{\zeta_0} P. \end{aligned} \quad (50)$$

Система уравнений (48) определяет сопряжение в случае непроводящей жидкости и аналогична системе, полученной Клаузером [2]. Неизвестными являются ζ_0 , η_0 , $(C_0)^{1/2}$ и R_0 . Величина скорости на стенке $f'(0) = \alpha_0$ служит свободным параметром. Путем изменения α_0 можно получить соотношение $(C_0)^{1/2} = g(R_0)$. Клаузер показал, что найденное таким способом соотношение почти идентично со следующим известным законом:

$$(C_0)^{-1/2} = 5,6 \lg R_0 + 4,3. \quad (51)$$

Мы решили сначала систему уравнений (48), используя для f_0 численные решения, полученные на электронной счетной машине. Некоторые наиболее существенные результаты расчета приведены на фиг. 1.



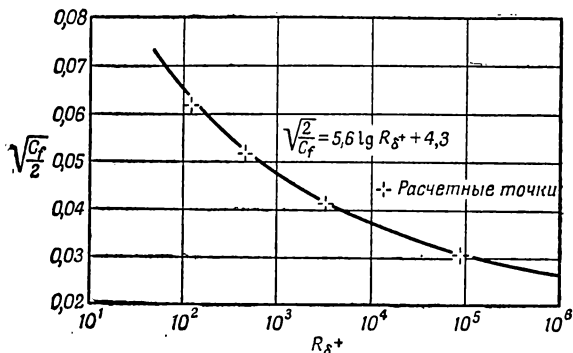
Фиг. 1. Характеристики турбулентного пограничного слоя непроводящего газа.

Для решения системы уравнений (50) все зависимые переменные необходимо выразить через α_0 . Поэтому мы нашли другое решение, используя для f_0 выражения, полученные интегральными методами (см. приложение). Ошибка, обусловленная применением этого способа, не превышает 1—2% для всех найденных величин. Величины,

существенные для настоящего анализа, даются формулами:

$$\begin{aligned}(C_0)^{1/2} &= 0,103313 (1 - \alpha_0), \\ f'_0(\eta_0) &= 1 - 0,749627 (1 - \alpha_0), \\ f''_0(\eta_0) &= \frac{1,975902}{\eta^+} (1 - \alpha_0), \\ \frac{\eta_0}{\eta^+} &= \frac{y_0}{\delta_0} = 0,127110, \\ \frac{K_0}{\eta^+} &= 0,3 (1 - \alpha_0).\end{aligned}\quad (52)$$

График зависимости величины $(C_0)^{1/2}$ от $\lg R_0$, подсчитанный из последних соотношений, сравнивается на фиг. 2 с аналогичной кривой, рассчитанной по уравне-



Фиг. 2. Сравнение экспериментального закона поверхностного трения с расчетными точками.

нию (51). Очевидно, результаты согласуются с достаточной для наших целей степенью точности.

Рассмотрим теперь систему уравнений (50). Функции f'_1 и f''_1 были определены интегральным методом (см. приложение) и могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned}f'_1(\eta_0) &= \Sigma_0 + (1 + \alpha_1) \Sigma_1 + P \Sigma_2, \\ f''_1(\eta_0) &= \Sigma'_0 + (1 + \alpha_1) \Sigma'_1 + P \Sigma'_2,\end{aligned}\quad (53)$$

где Σ_i и Σ'_i — функции α_0 , приведенные в приложении.

Принимая во внимание уравнения (48) и (52) и учитывая, что $u_1^+/u_0^+ = k_2(C_0)^{1/2} - 1$, можно записать уравнение (50) в виде

$$\begin{aligned} k_2 + A_1 B + A_2 P &= G_{10} + (1 + \alpha_1) G_{11} + 0,749627 k_2 (1 - \alpha_0), \\ A_3 B + A_4 P &= G_{20} + (1 + \alpha_1) G_{21} + Z G_{22} - \\ &\quad - 0,103313 k_2 (1 - \alpha_0), \quad (54) \\ - A_3 B - P &= 1 - Z - 0,103313 (1 - \alpha_0), \end{aligned}$$

где A_i — константы, $Z = \xi_1/\xi_0$ и G_{ij} — функции от $(1 - \alpha_0)$, приведенные в приложении.

Основными неизвестными в уравнениях (54) являются три константы: k_2 , B и P . Величины $\alpha_1 = f'(0)$ и $Z = \xi_1/\xi_0$ суть некоторые пока неизвестные функции α_0 . Эти функции должны обращать правые части уравнений (54) в постоянные.

Пусть

$$(1 + \alpha_1) G_{11} = -G_{10} - 0,749627 (1 - \alpha_0) + D_4, \quad (55a)$$

$$Z = -0,103313 k_2 (1 - \alpha_0) + D_3, \quad (55b)$$

$$\begin{aligned} G_{20} + \frac{G_{21}}{G_{11}} [-G_{10} - 0,749627 k_2 (1 - \alpha_0) + D_4] + \\ + G_{22} [0,137819 D_1 (1 - \alpha_0) + D_3] - 0,137819 D_1 (1 - \alpha_0) = D_2, \end{aligned} \quad (55в)$$

$$D_1 = -0,739726 k_2.$$

Тогда система уравнений (54) принимает вид

$$\begin{aligned} k_2 + A_1 B + A_2 P &= D_4, \\ A_3 B + A_4 P &= D_2, \\ A_3 B + P &= D_3 - 1, \end{aligned} \quad (56)$$

где все D_i — константы. Уравнения (55a) и (55b) могут быть всегда удовлетворены, так как они служат только для определения изменения свободных параметров α_1 и Z с изменением α_0 . Остается проверить, будет ли при таких изменениях параметров сохраняться постоянной левая часть уравнения (55в). Поскольку это уравнение содержит три произвольные константы D_1 , Γ

и D_4 , то всегда есть возможность удовлетворить ему для трех значений α_0 . Таким образом, решение было доведено до конца путем определения сначала величин D_4 и D_3 как функций от k_2 из уравнения (55в), записанного для трех различных величин α_0 , и затем решения уравнений (56) для остальных неизвестных B , P и k_2 . Тот факт, что константы D_i , найденные таким способом, действительно удовлетворяют уравнению (55в) при любом значении α_0 , был проверен апостериори для нескольких величин α_0 ; получено совпадение в пределах 1%.

В результате найдены следующие значения искомых величин:

$$B = -56,94, \quad P = 0,4222, \quad k_2 = 1,867,$$

$$Z = \frac{\zeta_1}{\zeta_0} = 0,3973 - 0,1929(1 - \alpha_0), \quad (57)$$

$$(1 + \alpha_1) G_{11} = -G_{10} - 1,3997(1 - \alpha_0) - 0,3061.$$

Этим завершается решение задачи, так как теперь мы знаем и качественные и количественные характеристики турбулентного пограничного слоя. Они обсуждаются в следующем параграфе.

§ 6. Анализ результатов и заключительные замечания

Сначала суммируем результаты, полученные в данном исследовании. При турбулентном течении электропроводной жидкости вдоль плоской пластинки в присутствии магнитного поля закон стенки и закон поверхностного трения принимают следующую модифицированную форму:

$$\frac{u}{u^+} = 5,6 \lg \left(\frac{u_0^+ y}{\nu} \right) + 4,9 - 56,9 \left(\frac{\sigma}{R_{\delta_0^+}} \right) \left(\frac{u_0^+ y}{\nu} \right), \quad (58a)$$

$$\frac{U_1}{u^+} = 5,6 \lg \left(\frac{u_0^+ \delta_0}{\nu} \right) + 7,543 - 1,87\sigma, \quad (58б)$$

где $\sigma = mx/U_0$, $R_{\delta_0^+} = U_0 \delta_0^+ / \nu$ и индекс «0» соответствует условиям при $\sigma = 0$ (отсутствует магнитное поле или непроводящая жидкость). Уравнения (58) верны для

малых магнитных чисел Рейнольдса и записаны с точностью до гленов порядка σ . Скорость U_1 есть скорость свободного потока, равная $U_0(1 - \sigma)$.

Динамическая скорость $u^+ = (\tau_0/\rho)^{1/2}$ дается выражением

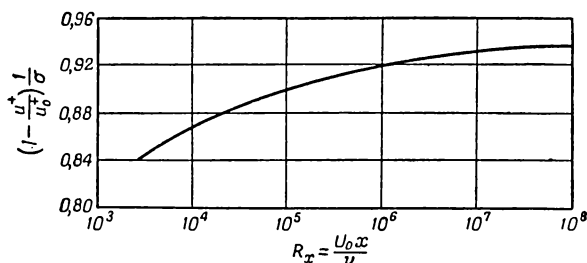
$$u^+ = u_0^+ \left[1 + \sigma \left(1,867 \left(\frac{1}{2} C_{f_0} \right)^{1/2} - 1 \right) \right], \quad (59)$$

где $(1/2 C_{f_0})^{1/2} = u_0^+/U_0$ — коэффициент поверхностного трения при $\sigma = 0$. С помощью трех предыдущих соотношений можно исследовать влияние магнитного поля на характеристики турбулентного пограничного слоя.

Считая, что $(1/2 C_{f_0})^{1/2}$ является функцией $R_x = U_0 x / \nu$, из уравнения (59) получаем, что при данном R_x динамическая скорость на стенке уменьшается при воздействии магнитного поля. На фиг. 3 величина,

$$\left[1 - \left(\frac{u^+}{u_0^+} \right) \right] \sigma^{-1} = 1 - 1,867 \left(\frac{1}{2} C_{f_0} \right)^{1/2},$$

определяющая скорость этого уменьшения на единицу σ , показана в зависимости от числа Рейнольдса R_x . Видно, что эта скорость увеличивается с ростом R_x довольно



Фиг. 3. Скорость убывания динамической скорости на единицу магнитного параметра σ .

сильно. Для числа Рейнольдса, равного 10^5 , уменьшение динамической скорости (т. е. поверхностного трения на стенке) составляет уже примерно 10% при значениях σ порядка 0,1.

Это уменьшение касательного напряжения на стенке при данном R_x усматривается также из выражения (33), определяющего микромасштаб турбулентности. В самом деле, оказывается, что для вычисленной нами величины константы (если все остальные величины постоянны, т. е. $R_x = \text{const}$) присутствие магнитного поля вызывает увеличение микромасштаба λ и, следовательно, приводит к уменьшению доли турбулентной кинетической энергии, диссипируемой вследствие вязкости жидкости.

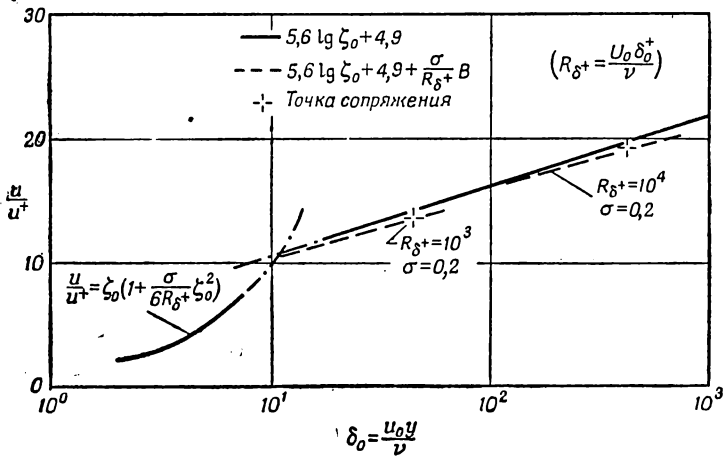
Отсюда следует другое важное замечание, относящееся к предшествующему обсуждению вопроса о переносе энергии во внутреннем слое. Мы видели, что при данном начальном уровне энергии в свободном потоке подвод турбулентной кинетической энергии к внутреннему слою при наличии магнитного поля, связанного с пластинкой, уменьшается вследствие «магнитной» диссипации средней кинетической энергии (джоулевой диссипации) во внешнем слое. Это уменьшенное количество подводимой энергии должно диссипировать во внутреннем слое вследствие как вязкого, так и «магнитного» воздействия, так что следует ожидать уменьшения касательного напряжения по двум причинам. Если считать, что увеличение микромасштаба турбулентности может быть приписано уменьшению подвода энергии, то из уравнения (34) и из найденного численного значения B видно, что уменьшение касательного напряжения на стенке вызывается в основном уменьшением подвода энергии, а не дополнительной джоулевой диссипацией во внутреннем слое.

Уравнение (58б) показывает, что для данного числа Рейнольдса R_x отношение $(U_1/u^+)(u_0^+/u_0)$ всегда немного меньше единицы, т. е. коэффициент поверхностного трения $1/2 C_f$, рассчитанный по скорости свободного потока U_1 , немного больше, чем $1/2 C_{f_0}$. Это непосредственно следует из того факта, что, как видно из уравнения (59), быстрота убывания скорости свободного течения с ростом σ немного больше скорости уменьшения u^+ .

В ламинарном случае присутствие магнитного поля вследствие введения соответствующего дополнительного характерного размера делает невозможным получение строго подобного поля течения.

Точно так же в турбулентном случае присутствие магнитного поля нарушает справедливость «универсального» закона стенки, поскольку здесь даже профиль скорости во внутренней области явно зависит от числа Рейнольдса R_x .

Эти профили скоростей изображены в зависимости от ζ_0 на фиг. 4 для нескольких характерных значений σ и R_{δ^+} . Отклонение от классической прямой линии наблюдается тем раньше, чем меньше число Рейнольдса R_{δ^+} . Это отклонение довольно велико даже при малых σ . На фиг. 4 приведен также профиль скорости в ламинарном подслое; видно, что он практически не зависит от



Ф и г. 4. Профили скорости в пристеночной области для турбулентных магнитогидродинамических пограничных слоев.

магнитного поля. Такое поведение профиля объясняется тем, что корректирующие члены, появляющиеся в уравнении «ламинарного» профиля скоростей

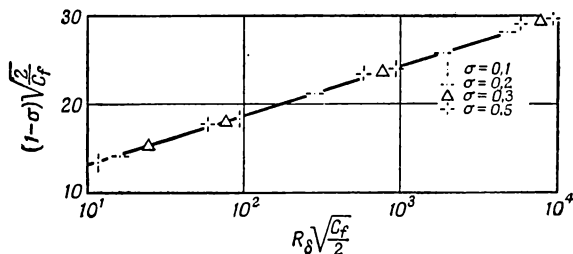
$$\frac{u}{u^+} = \zeta_0 \left[1 + \frac{1}{6} \left(\frac{\sigma}{R_{\delta^+}} \right) \zeta_0^2 \right],$$

дает заметный вклад только тогда, когда значения ζ_0 лежат уже в «турбулентной» области.

Если закон стенки не является больше «универсальным», то этого нельзя сказать о законе поверхностного трения. Учитывая, что $U_1 = U_0(1 - \sigma)$, и определяя коэффициент поверхностного трения C_f и число Рейнольдса R_δ по начальной скорости свободного потока U_0 с помощью формул $(1/2 C_f)^{-1} = (U_0/u^+)^2$, $R_\delta = (U_0 \delta_0^+ / \nu)(1 - 0,2323\sigma)$, уравнение (58б) можно записать в виде

$$(1 - \sigma) \left(\frac{1}{2} C_f \right)^{-1/2} = 5,6 \lg \left[\left(\frac{1}{2} C_f \right) R_\delta \right] + 7,543. \quad (60)$$

Очевидно сходство этой формулы и обычного закона поверхностного трения. На фиг. 5 показано, как точки,



Фиг. 5. Закон поверхностного трения для турбулентных магнитогидродинамических пограничных слоев.

подсчитанные для нескольких значений σ , R_δ и α_0 , могут быть все связаны прямой линией, описываемой уравнением (60). На той же фигуре отмечено несколько точек, подсчитанных для $\sigma = 0,5$. Их положение на диаграмме ясно характеризует пределы применимости настоящих результатов.

Выводы

Исследованы некоторые вопросы теории турбулентного магнитогидродинамического пограничного слоя в случае низких магнитных чисел Рейнольдса. Получены основные уравнения и уравнения сохранения средней и турбулентной кинетической энергии. Постулирована соответствующая модель диссипативной области и выве-

дены в модифицированной форме закон стенки и закон поверхностного трения. Перечислим основные результаты.

Спектральная плотность турбулентной магнитной энергии при любом волновом числе по меньшей мере на один порядок величины меньше, чем спектральная плотность турбулентной кинетической энергии.

При любом волновом числе спектральная плотность кинетической энергии снижается при наличии магнитного поля.

Уменьшение касательного напряжения на стенке вызывается двумя сопутствующими друг другу причинами. Во-первых, работа, производимая осредненным течением против магнитного поля во внешнем слое, приводит к уменьшению потока энергии во внутренний слой. Во-вторых, уже уменьшенная подводимая энергия диссипирует под действием вязкости и магнитного поля.

Количественное исследование показывает, что первая причина имеет большее значение.

Закон стенки не является больше универсальным, так как показана его явная зависимость от числа Рейнольдса.

Закон поверхностного трения может быть представлен в универсальной форме, сходной по структуре с обычным законом трения, справедливым в случае обычного турбулентного течения. Последние результаты, так же, как и большая часть количественных результатов, верны для случая, когда величина σ (число Кармана, определенное по расстоянию x , отсчитываемому в направлении течения, и начальной скорости свободного потока U_0) мала.

Приложение

Решение основных уравнений

Уравнение (42a). Уравнение, которое необходимо решить, имеет вид

$$f_0''' + f_0 f_0'' = 0 \quad \left(\eta_0 = \frac{\eta^+ y}{\delta_0} \right), \quad (П1)$$

$$f_0(0) = 0, \quad f_0'(0) = \alpha_0, \quad f_0'(+\infty) = 1. \quad (П2)$$

Обозначая $z = \eta^0/\eta^+$ и интегрируя уравнение (П1) от 0 до $+\infty$, находим решение, которое удовлетворяет граничным условиям (П2) и дает

$$f_0'''(0) = f_0''(\infty) = f_0'(\infty) = 0.$$

Это решение имеет вид

$$f_0 = \eta^+ [z + (1 - \alpha_0) T(z)], \quad (\text{П3})$$

где

$$T(z) = -z + z^2 - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{5}z^5, \quad (\text{П4})$$

$$(\eta^+)^2 = \frac{2}{0,3 - 0,182539(1 - \alpha_0)}.$$

Величины, используемые в настоящем анализе, подсчитываются при $\eta_0/\eta^+ = z_0 = 0,12711$ и выражаются следующим образом:

$$\left(\frac{u}{u_0}\right)(z_0) = f_0'(z_0) = 1 - 0,749627(1 - \alpha_0),$$

$$\frac{\delta_0^+}{\delta_0} = \int_0^1 (1 - f_0') dz = \frac{K_0}{\eta^+} = 0,3(1 - \alpha_0), \quad (\text{П5})$$

$$f_0''(z_0) = \frac{1}{\eta^+} 1,975902(1 - \alpha_0),$$

$$f_0(z_0) = \eta^+ [0,12711 - 0,111077(1 - \alpha_0)].$$

Уравнение (426). Уравнение, которое необходимо проинтегрировать, имеет вид

$$\frac{2}{n+1} [f_1' f_0' - f_1 f_0'' + f_0'] - f_1 f_0'' - f_0 f_1'' = f_1''' + P f_0''', \quad (\text{П6})$$

$$f_1(0) = 0, \quad f_1'(+\infty) = 1, \quad f_1'(0) = \alpha_1, \quad (\text{П7})$$

где $n = 4/5$ и $P = 2a/(n+1)$, a — константа, определяемая соотношением (37). Интересующее нас решение должно быть выражено как функция от двух параметров α_1 и P .

Решение, удовлетворяющее уравнению (П6) при $z = \eta_0/\eta^+ = 0$ и граничным условиям (П7), имеет вид

$$f_1' = \Sigma_0 + (1 + \alpha_1) \Sigma_1 + P \Sigma_2, \quad (\text{П8})$$

где

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= 2H_0S_1 - 1, \\ \Sigma_1 &= 1 + S_0 + 2H_1S_1 + \frac{\eta^{+2}\alpha_0}{n+1}S_2, \\ \Sigma_2 &= 2H_2S_1;\end{aligned}\quad (\text{П9})$$

здесь S_i — функции только от z , а H_i — функции только от α_0 . Их выражения:

$$\begin{aligned}S_0 &= -4z^3 + 3z^4, & S_1 &= z - 3z^3 + 2z^4, \\ S_2 &= z^2 - 2z^3 + z^4, \\ H_0 &= \frac{0,15(1-\alpha_0)}{A}, \\ H_1 &= \frac{1}{A} \left\{ 0,3 - (1-\alpha_0) \left[0,273811 + 0,007937 \frac{\eta^{+2}\alpha_0}{n+1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{0,05\eta^{+2}\alpha_0}{3(n+1)} \right\}, \\ H_2 &= \frac{1-\alpha_0}{\eta^{+2}A} \frac{n+1}{3+n}, \\ A &= 0,091270(1-\alpha_0) - 0,15 - \frac{n+1}{3+n} \frac{1}{\eta^{+2}}.\end{aligned}\quad (\text{П10})$$

Выражение для η^+ дается формулой (П4). Значения S_i и их первых производных при $z = z_0$:

$$\begin{aligned}S_0 &= -0,007433, & S_1 &= 0,121470, & S_2 &= 0,012310, \\ S'_0 &= -0,169236, & S'_1 &= 0,871019, & S'_2 &= 0,165494.\end{aligned}\quad (\text{П11})$$

Выражения для функций, входящих в систему уравнений (54),

$$\begin{aligned}G_{10} &= \frac{f'_0 + \Sigma_0}{(C_0)^{1/2}}, & G_{11} &= \frac{\Sigma_1}{(C_0)^{1/2}}, \\ G_{20} &= 1 + \left[\frac{kz_0 \Sigma'_1}{(C_0)^{1/2}} \right], & G_{21} &= \frac{kz_0 \Sigma'_1}{(C_0)^{1/2}}, \\ G_{22} &= (1 - \eta_0 f_0), & k &= 0,4112.\end{aligned}\quad (\text{П12})$$

Все эти функции должны быть вычислены при $z = z_0 = 0,12711$. Значения констант, входящих в уравнения (56),

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{z_0}{H_0} = 0,043772, \\ A_2 &= -\frac{\Sigma_2}{(C_0)^{1/2}} = 0,755845, \\ A_3 &= h = 0,018, \\ A_4 &= -\frac{kz_0\Sigma_2'}{(C_0)^{1/2}} = 0,283287. \end{aligned} \quad (\text{П13})$$

Константа $H_0 = u_0^+ x / U_0 \delta_0$ была взята равной 2,9038 в соответствии со следующим расчетом.

Из уравнений (П5) и (52) следует, что

$$\frac{\delta_0^+}{\delta_0} = 0,3(1 - \alpha_0) = 2,9038(C_0)^{1/2}.$$

С другой стороны, для больших значений $R_x = U_0 x / \nu$ с достаточной для наших целей точностью можно принять, что $\delta_0^+ = x C_0$, отсюда

$$\frac{u_0^+ x}{U_0 \delta_0} = 2,9038. \quad (\text{П14})$$

Обсуждение

Проф. Лин (С. С. Lin)¹⁾ спросил, в чем физический смысл предположения, что турбулентная магнитная энергия много меньше турбулентной кинетической энергии? Автор утверждал, что, поскольку магнитное число Рейнольдса предполагается малым, уравнения могут быть линеаризованы. Поэтому нет передачи энергии от турбулентного поля скоростей к турбулентному магнитному полю, или, точнее, $G(k) \ll F(k)$ для всех величин k , где $G(k)$ и $F(k)$ — соответственно спектральные плотности турбулентной магнитной и кинетической энергии.

¹⁾ Институт перспективных исследований, Принстон, шт. Нью-Джерси.

Дополнительное физическое обоснование этого предположения было предложено д-ром Колгэйттом (S. A. Colgate)¹⁾. Он отметил, что если магнитное число Рейнольдса мало, как предположил автор, то толщина скин-слоя велика. Поэтому вихри не в состоянии растягивать или искривлять силовые линии. При отсутствии этого механизма поле не будет увеличиваться и останется малым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Townsend A. A., The Structure of Turbulent Shear Flow, New York, 1956.
2. Clauser F. H., Advances in Appl. Mech., 4, 118 (1956).
3. Ferrari C., «Turbolenza di parete», Teoria della turbolenza, C. I. M. E., Varenna, September 1—10, 1957.
4. Chandrasekhar S., Proc. Roy. Soc., London, A233, 330 (1955), (Имеется перевод в сборнике: Проблемы современной физики, вып. 7, ИЛ, 1957.)

¹⁾ Радиационная лаборатория Лоуренса, Калифорнийский университет, Ливермор, шт. Калифорния.

3. ПЕРЕХОД ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРУБЕ В ТУРБУЛЕНТНОЕ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

П. Ликодис

P. S. Lykoudis ¹⁾, Rev. Mod. Phys., 32, No. 4, 796 (1960)

§ 1. Введение

Одной из самых первых задач магнитной гидродинамики была задача о течении электропроводной жидкости в канале при наличии поперечного магнитного поля. Хотя первая попытка теоретического и экспериментального решения этой проблемы сделана еще в 1937 г. в оригинальной работе Гартмана и Лазаруса [1, 2], такое, очевидно, простое течение до сих пор привлекает внимание исследователей [1—10]. Проблема ламинарного течения, которая весьма далека от своего решения в наиболее общих случаях (исследование магнитных и динамических эффектов на входе, влияния формы поперечного сечения, влияния стенок, влияния больших магнитных чисел Рейнольдса и т. д.), в сущности сравнительно хорошо изучена как теоретически, так и экспериментально. Случай турбулентного течения, по-видимому, все еще не поддается строгому математическому анализу даже при отсутствии магнитогидродинамических эффектов. Известно несколько экспериментальных работ [1—3], в которых по существу был определен коэффициент поверхностного трения при течении жидких металлов в поперечном магнитном поле, однако совершенно отсутствуют даже зачатки эмпирической теории, учитывающей известные полуэмпирические результаты, полученные для немагнитного случая. Здесь сделана попытка осветить некоторые вопросы, связанные с этой проблемой.

¹⁾ School of Aeronautical Engineering, Purdue University, Lafayette, Indiana.

Необходимо различать два класса турбулентных пограничных слоев в магнитной гидродинамике.

а) В первом классе пограничных слоев линии индуцированного тока являются замкнутыми, и поэтому при отсутствии приложенного электрического поля нет накопления электрического заряда. В этом случае индуцированное электрическое поле равно нулю, и единственной действующей силой является сила, пропорциональная векторному произведению векторов скорости и напряженности магнитного поля. Такой случай имеет место, например, при магнитогидродинамическом обтекании осесимметричного тела, несущего магнитную катушку, ось которой параллельна оси тела (для ламинарного случая см. работу [11]).

б) Во втором классе турбулентных пограничных слоев в магнитной гидродинамике линии индуцированного тока не замыкаются. Следовательно, возникает накопление электрического заряда, которое в свою очередь вызывает ненулевое электрическое поле. Это — случай течения в канале [12].

Здесь делается попытка установить теоретический критерий перехода ламинарного течения в турбулентное для такого случая течения в канале, когда магнитное поле перпендикулярно к потоку. В работе выявляются безразмерные параметры, от которых зависит решение задачи и обсуждается структура турбулентного пограничного слоя. Теоретические результаты сравниваются с имеющимися экспериментальными данными.

§ 2. Ламинарный подслой

Если допустить существование в канале ламинарного подслоя, то оправдано считать, что в этом подслое справедливо решение для ламинарного течения, найденное Гартманом и Лазарусом [12]. В наших обозначениях это решение записывается в виде

$$u_{\text{лам}}^* = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\text{ch } M - \text{ch } M \left(1 - \frac{y}{L}\right)}{\text{sh } M} \right], \quad (1)$$

где

$$M = BL \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} - \text{число Гартмана}^1), \quad (2)$$

$$\lambda^2 = \frac{\sigma \mu B^2}{\rho \tau_w}, \quad (3)$$

$$u^* = \frac{u}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}, \quad y^* = \frac{\rho}{\mu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} y. \quad (4)$$

Параметр λ не зависит от какого-либо характерного линейного размера, однако удобно ввести этот размер искусственно в числитель и знаменатель, так чтобы можно было выразить данный параметр через другие известные безразмерные параметры. Легко показать, что

$$\lambda = \frac{M}{\text{Re} \sqrt{\frac{c_f}{2}}}, \quad (5)$$

где

$$\text{Re} = \frac{u_{\text{ср}} L}{\nu} - \text{число Рейнольдса}, \quad (6)$$

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_{\text{ср}}^2} - \text{коэффициент поверхностного трения}; \quad (7)$$

L — характерный линейный размер, например диаметр трубы D или ширина канала.

Профиль скорости при ламинарном течении, задаваемый уравнением (1), можно упростить, приняв во внимание тот факт, что для обычных случаев течения жидких металлов число Гартмана гораздо больше трех и поэтому можно заменить величину $\text{th } M$ единицей. В результате получим

$$u_{\text{лам}}^* = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda y^*}). \quad (8)$$

Это формула имеет такой же вид, как и формула для профиля скорости в ламинарном подслое с отсосом.

¹⁾ Здесь мы используем общепринятое определение числа Гартмана; было бы более естественно определить его как квадрат величины, стоящей в правой части (2), так как оно служило бы тогда мерой отношения магнитных сил к силам вязкости.

В случае подслоя с отсосом величина λ определяется следующим образом [13]:

$$\lambda = \frac{v}{u_\delta \sqrt{\frac{c_f}{2}}} = \frac{(Re)_v}{(Re)_u \sqrt{\frac{c_f}{2}}}, \quad (9)$$

где индекс δ относится к условиям на внешней границе пограничного слоя. Из сравнения выражений (9) и (5) очевидно, что число Гартмана оказывает на ламинарный пограничный слой точно такое же влияние, как и параметр, характеризующий отсос, если последний определен как число Рейнольдса $(Re)_v$.

Формула (8) показывает, что магнитное поле входит в решение только через параметр λ , который в конечном счете будет фактором, определяющим универсальные профили скорости при наличии магнитного поля. Теперь возникает вопрос о том, где находится граница ламинарного подслоя. В качестве критерия перехода [13] можно принять условие

$$\rho \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \frac{y_l}{\mu} = 11,3, \quad (10)$$

где индекс l относится к границе подслоя¹⁾. Определяя касательное напряжение τ из формулы (8) и подставляя его в выражение (10), получаем

$$(1 + \lambda u_l^*)^{1/2} y_l^* = 11,3. \quad (11)$$

Подставляя выражение (8) в условие (11), можно показать, что справедливо также следующее соотношение:

$$\lambda = \frac{2 \ln \left(\frac{y_l^*}{11,3} \right)}{y_l^*}. \quad (12)$$

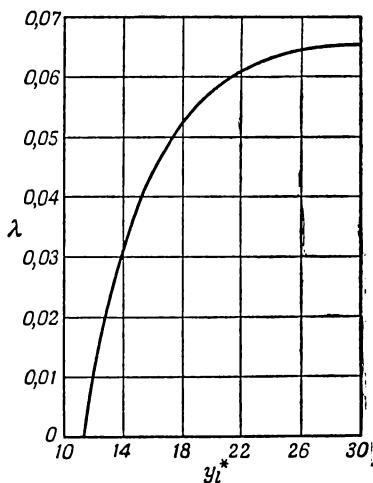
Настоящее соотношение, представленное графически на фиг. 1, показывает, что при увеличении λ (при

¹⁾ Значение 11,3 есть величина y_l^* в точке пересечения ламинарного профиля $u^* = y^*$ и развитого турбулентного профиля $u^* = 5,5 + 2,5 \ln y^*$, известных из обычной гидродинамики.

увеличении магнитного поля) толщина ламинарного подслоя также растет вплоть до некоторого значения, а затем дальнейший рост y_l^* вызывает уменьшение λ . Ясно, что это максимальное значение λ определяет максимальную величину магнитного поля, при которой еще может поддерживаться турбулентность. Аналитическое определение максимума дает следующие значения:

$$(y_l^*)_{\max} = 30,75, \quad \lambda_{\max} = 0,06511. \quad (13)$$

Ввиду отсутствия экспериментального подтверждения справедливости этого критерия нетрудно показать



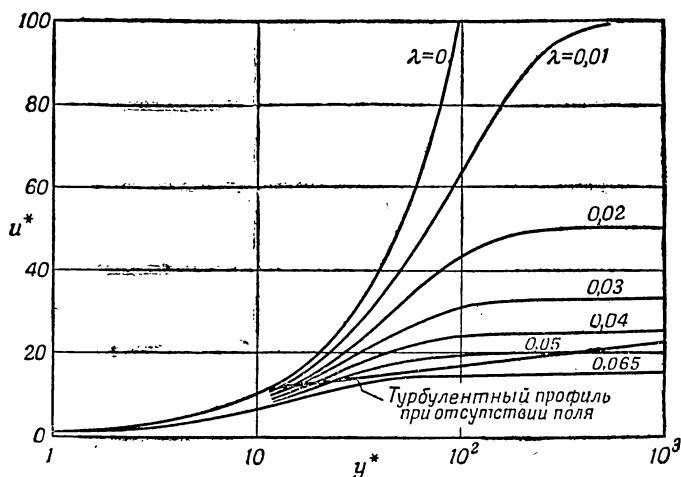
Фиг. 1. Толщина ламинарного подслоя y_l^* как функция магнитного параметра λ .

из других соображений, что указанные численные значения правильны с физической точки зрения. Для этого достаточно построить кривые зависимости (8) для различных λ . При возрастании y^* универсальная скорость u^* асимптотически стремится к величине $1/\lambda$. Если на тот же график нанести турбулентный профиль скорости при отсутствии магнитного поля, то станет очевидным, что имеется значение λ , выше которого ламинарный профиль всегда лежит под турбулентным. Значение λ , при котором кривые касаются, определяет максимум λ , выше кото-

рого весь пограничный слой является ламинарным. Это построение показано на фиг. 2. Рассчитанное таким образом значение λ_{\max} есть

$$\lambda_{\max} \approx 0,0628. \quad (14)$$

Разница между данным значением и значением, определяемым формулой (13), составляет всего 3,5%.



Фиг. 2. Структура ламинарного подслоя в магнитогидродинамическом турбулентном течении в канале.

§ 3. Критерий перехода ламинарного течения в турбулентное

Несмотря на то что мы не располагаем экспериментальными профилями скорости для турбулентного течения в магнитном поле, для определения перехода от ламинарного течения к турбулентному можно использовать имеющиеся значения коэффициентов поверхностного трения. Эти данные [3] показывают, что переход возникает при значении $Re/M \approx 225$ ¹⁾.

Известно, что если построить график зависимости коэффициента поверхностного трения от отношения M/Re , то в случае ламинарного течения получится прямая линия

$$c_f \approx 2 \frac{M}{Re}. \quad (15)$$

Отклонение экспериментальных данных от этой прямой указывает на наличие турбулентности.

¹⁾ Фактическое значение, полученное в работе [3], равно 900. Разница в четыре раза в этих двух значениях объясняется разными определениями характерного линейного размера,

Теоретический критерий, определяемый условием (10), полностью соответствует вышеупомянутому эмпирическому критерию [3]. Доказательство состоит в следующем: подставив значение c_f из формулы (15) в выражение (5) и используя максимальное значение λ , определенное формулой (13), получим, что

$$\frac{Re}{M} = \lambda^{-2} = (0,0651)^{-2} \approx 236.$$

Действительно, тщательный анализ фиг. 3 работы [3] показывает, что это значение ближе к экспериментальным данным, чем указанное там значение 225¹⁾.

§ 4. Турбулентная область

Определив u_i^* и y_i^* , рассмотрим турбулентную область у стенки.

В полностью развитом турбулентном течении силы на единицу объема, действующие в направлении течения (по оси x), складываются из силы сдвига и ponderomotorной силы, которая определяется произведением $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Пренебрегая вкладом молекулярной вязкости в касательное напряжение (допущение, справедливое вдали от ламинарного подслоя), предполагая справедливым закон Ома и считая, что постоянное магнитное поле \mathbf{B} всюду перпендикулярно течению, можно выразить ток в следующем виде:

$$J = \sigma(E - uB). \quad (16)$$

Далее если τ — турбулентный вклад в касательное напряжение, то уравнение сохранения количества движения по оси x в турбулентной области вблизи стенки имеет вид

$$\frac{d\tau}{dy} - \sigma B^2 u + \sigma B E = 0. \quad (17)$$

¹⁾ Дополнительные эксперименты вполне могут дать некоторое отклонение от этих численных значений, однако стоит отметить удачное совпадение настоящей простой теории с единственным имеющимся экспериментом.

Из этого уравнения видно, что второй член представляет тормозящую силу, а последний — ускоряющую. Установлено, что в случае ламинарного течения удобным упрощающим предположением является следующее: для того, чтобы определить индуцированное электрическое поле, надо положить полный ток, текущий в плоскости, перпендикулярной течению, и определяемый как $\int J_z dy$, равным нулю. Тогда величина E будет представлять однородное среднее электрическое поле, вызывающее постоянную ускоряющую поперек течения силу, которая преобладает вблизи стенки, где член $-\sigma B^2 u$ весьма мал. По этой причине можно ожидать ускорение течения у стенки, торможения в центре канала и, следовательно, уплощения профиля скорости.

После выяснения характера действующих сил уравнение движения можно записать в безразмерном виде следующим образом:

$$\frac{d\bar{\tau}}{dy^*} - \lambda^2 u^* + \lambda^2 \left[\frac{E}{B \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} \right] = 0, \quad (18)$$

где

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau_w}. \quad (19)$$

Третий член в уравнении количества движения, взятый без множителя λ^2 , следует понимать как среднюю скорость u_{cp}^* , имея в виду ранее сделанное предположение о значении электрического поля E . Таким образом, вблизи стенки

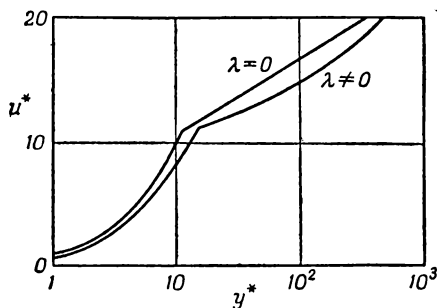
$$\frac{d\bar{\tau}}{dy^*} - \lambda^2 u^* + \lambda^2 u_{cp}^* = 0. \quad (20)$$

Очевидно, что необходимо феноменологическое соотношение между касательным напряжением $\bar{\tau}$ и градиентом скорости.

К сожалению, даже если такое соотношение и может быть написано, интегрирование нельзя выполнить в общей форме. Из-за наличия члена $\lambda^2 u_{cp}^*$ скорость u^* зависит не только от универсальных параметров λ и y^* , но и от значения y_{cr}^* на границе турбулентного пограничного слоя.

ного слоя. Это означает, что в магнитогидродинамическом случае не существует универсальных решений.

Выполненные в университете Пэрдью исследования, в которых использовались различные упрощающие предположения, показали, что профиль скорости в турбулентной области феноменологически ведет себя так же, как в случае пограничного слоя с отсосом [13]. Предварительные расчеты коэффициента поверхностного тре-



Фиг. 3. Характер профилей скорости в магнитогидродинамическом турбулентном течении в канале.

ния, основанные на этой модели, дали хорошее совпадение с экспериментом [3]. Характер изменения и относительное положение профиля скорости в присутствии магнитного поля по отношению к профилю без поля показаны на фиг. 3. Результаты этих исследований, как только они будут закончены, будут изложены в другой статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hartmann J., Det Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd., 15, No. 6 (1937).
2. Hartmann J., Lazarus F., Det Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd., 15, No. 7 (1937) (см. статью 4 дополнения).
3. Murgatroyd W., Phil. Mag., 44, 1348 (1953) (см. статью 5 дополнения).
4. Shercliff J. A., Proc. Cambr. Phil. Soc., 49, 136 (1953).

5. Shercliff J. A., Proc. Roy. Soc., London, **A233**, 396 (1955).
6. Shercliff J. A., Proc. Cambr. Phil. Soc., **52**, 573 (1956).
7. Shercliff J. A., Journ. Nuclear Energy, **3**, 305 (1956).
8. Shercliff J. A., Journ. Fluid Mech., **1**, 644 (1956).
9. Lykoudis P. S., Purdue University, School of Aeronautical Engineering, Rept. A-59-4 (March, 1959).
10. Chang C. C., Lundgren T. S., Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford, California, 1959, p. 41.
11. Lykoudis P. S., Proc. 9th Intern. Astronaut. Congr., Amsterdam, 1958, p. 168.
12. Cowling T. G., Magnetohydrodynamics, New York, 1957, p. 13.
(Имеется перевод: Т. Каулинг, Магнитная гидродинамика, ИЛ, 1959.)
13. van Driest E. R., Zs. angew. Math. u. Phys., **9b**, 233 (1958).

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ РТУТИ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. Гартман, Ф. Лазарус

J. Hartmann, F. Lazarus, Det. Kgl. Dansk. Vidensk. Selsk.,
Mat.-fys. Medd., 15, No. 7 (1937)

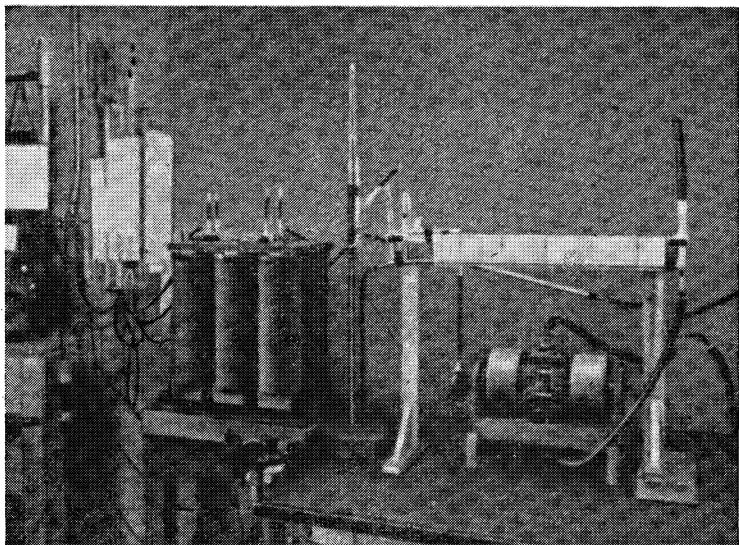
Введение

Главной целью исследований, излагаемых в данной статье, являлось изучение влияния однородного магнитного поля на течение проводящей жидкости (ртути) в трубках круглого и прямоугольного сечения. В предыдущей статье [1] этот вопрос рассматривался с теоретической точки зрения применительно к течению в плоском канале прямоугольного сечения. Предполагалось, что течение является ламинарным, поле направлено по нормали к стенкам канала, имеющим большую площадь, а две другие стенки образованы электродами, изготовленными из высокопроводящего материала. Эксперименты, которые будут рассмотрены в дальнейшем, проводились главным образом для проверки основных результатов теоретического решения задачи. Однако в ходе этих экспериментов были изучены новые явления, не нашедшие отображения в теории, в частности влияние однородного магнитного поля на турбулентное течение и переход турбулентного течения в ламинарное. В этом отношении настоящую работу можно рассматривать как дальнейшее развитие исследования, выполненного в данной лаборатории несколько лет назад и посвященного сравнению процессов течения воды и ртути в трубках [2]. Результаты этого исследования показали, что закон подобия Рейнольдса при течении ртути хорошо выполняется даже тогда, когда стенки трубки не смачиваются ртутью. Эксперименты, рассматриваемые в данной статье, достаточно убедительно подтверждают это фундаментальное положение.

I. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

§ 1. Принципиальная схема установки

Принципиальная схема экспериментальной установки показана на фиг. 1. Использовался гидродинамический контур, течение в котором поддерживалось с помощью

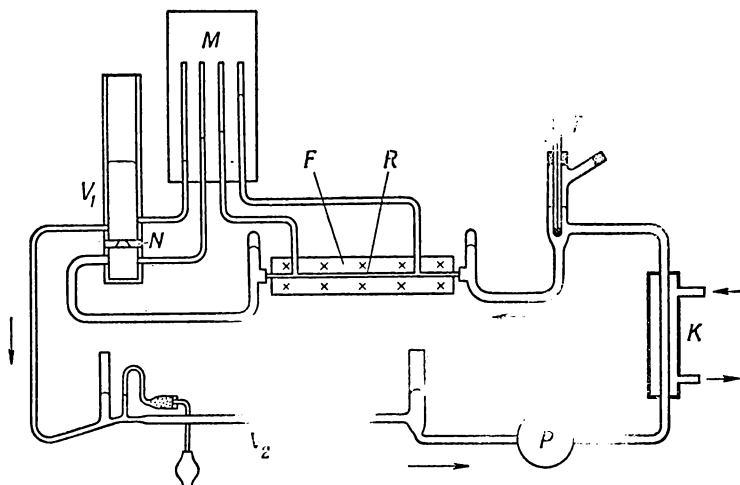


Ф и г. 1. Схема экспериментальной установки.

электромагнитного насоса P^1). Рабочим каналом установки, в котором исследовалось течение, служила стеклянная трубка или канал прямоугольного сечения R . Рабочий канал помещался в однородное магнитное поле F , создававшееся между полюсами электромагнита специальной конструкции. Перепад давления на определенной длине рабочего канала регистрировался с помощью

¹⁾ Принцип действия такого насоса рассматривается в работе [1].

двух манометрических трубок, подключенных к штуцерам рабочего канала. Секундный объемный расход ртути через каждое сечение гидродинамического контура измерялся с помощью дроссельного расходомера V_1 с мерной шайбой. Для быстрой проверки объемного расхода использовался расходомер V_2 специальной конструкции. Ввиду того что ртуть нагревалась электрическим током, питающим электромагнитный насос, установку пришлось



Ф и г. 2. Общий вид экспериментальной установки.

снабдить теплообменником K ; температура измерялась с помощью термометра T и поддерживалась постоянной, равной 20°C . На фиг. 2 приводится фотография части установки, включающей электромагнитный насос (справа) и электромагнит (слева).

Различные узлы гидродинамического контура будут рассмотрены подробно в дальнейшем. Остановимся на подготовке рабочих каналов, особенно на подготовке стеклянных трубок. Все трубки были сравнительно небольшого диаметра. В тех случаях, когда капилляры не подвергались предварительно специальной очистке, результаты экспериментов оказывались весьма сомни-

тельными. Это объясняется наличием тонкой пленки загрязнений на внутренней поверхности трубок. Для удаления этой пленки стеклянные капилляры на протяжении нескольких часов обрабатывались раствором бихромата калия $K_2Cr_2O_7$ в концентрированной серной кислоте. После этого трубки промывались сначала водой, а потом чистым спиртом. Если капилляры затем высушить, продувая через них сухой воздух, то результаты испытаний будут воспроизводимы с точностью до нескольких десятых долей процента; это качество капилляров будет сохраняться довольно долго, если капилляры не опоражниваются, а ртуть перед заливкой в контур тщательно очищается и обезжизивается.

В случае рабочих каналов прямоугольного сечения применять указанный метод очистки было практически нецелесообразно. Вместо этого стенки обрабатывались бензолом по методу, который рассмотрен ниже.

§ 2. Измерение расхода ртути

Расход ртути, т. е. объем V , проходящий в секунду через каждое сечение контура, как отмечалось выше, обычно измерялся при помощи мерной шайбы N , через которую поток ртути проходил так, как это показано на фиг. 1. Шайба монтировалась в вертикальной трубе и могла быть легко заменена другой. Всего использовалось 7 шайб. В первой колонке табл. 1 указаны диаметры отверстий шайб. Во второй колонке приводятся значения постоянной прибора k , определяемой из соотношения

$$V = k \sqrt{h} \text{ см}^3/\text{сек.} \quad (1)$$

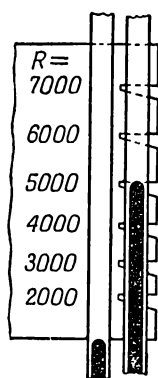
Здесь h — перепад давления на шайбе, измеренный в см рт. ст.

Для определения величины h применялись манометрические трубки, показанные на фиг. 1. Трубки монтировались на прозрачной шкале с миллиметровыми делениями; шкала подсвечивалась сзади. В продолжение каждого из первоначальных испытаний напряженность магнитного поля H поддерживалась постоянной, а расход менялся с целью получения ряда значений числа Рейнольдса R . С каждой трубкой или каналом проводилась

Таблица 1
Значения постоянной мерных шайб,
использовавшихся при измерениях
расхода

Диаметр отверстия, мм	Постоянная k
2,950	1,960
2,043	1,000
1,551	0,584
1,106	0,294
0,832	0,179
0,651	0,111
0,412	0,0463

серия испытаний при определенном значении H . С целью упрощения работы для каждой из испытывав-



Фиг. 3. Транспарант с вырезами для быстрой проверки объемного расхода.

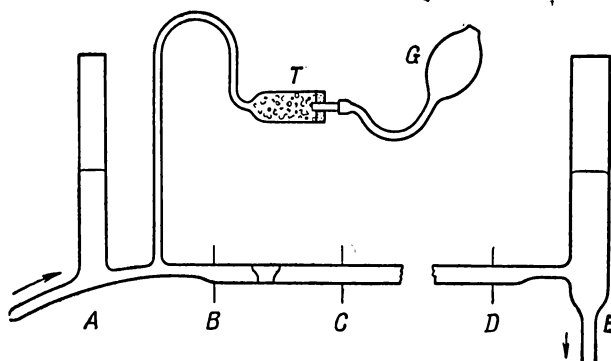
шихся трубок или каналов были изготовлены картонные транспаранты с вырезами, изображенные на фиг. 3. При перепаде давления, соответствующем расстоянию от нижнего среза транспаранта до горизонтальной кромки некоторого выреза, число Рейнольдса потока в исследуемом канале имело значение, записанное против этого выреза на поле транспаранта. Из сказанного ясно, как с помощью транспаранта можно было быстро устанавливать в процессе испытания величину расхода.

Было найдено целесообразным использовать, в дополнение к описанному выше расходомеру дроссельного типа, другой прибор, особенно для быстрой проверки работы этого расходомера. На фиг. 1 такой прибор обозначен через V_2 .

В более крупном масштабе он показан на фиг. 4. Основной частью прибора является стеклянная калиброванная трубка BCD . Непосредственно перед входом в эту трубку в поток ртути можно ввести

воздушный пузырек. Этот пузырек переносится потоком, и остается только измерить время прохождения пузырьком известного расстояния между двумя отметками C и D на трубке. Зная время прохождения пузырька и калибр трубки, можно легко определить объемный расход ртути.

При проектировании и использовании только что рассмотренного датчика расхода необходимо соблюдать определенные предосторожности. Пузырек должен заполнять все сечение трубки. Поэтому внутренний диаметр



Ф и г. 4. Расходомер с движущимся воздушным пузырьком.

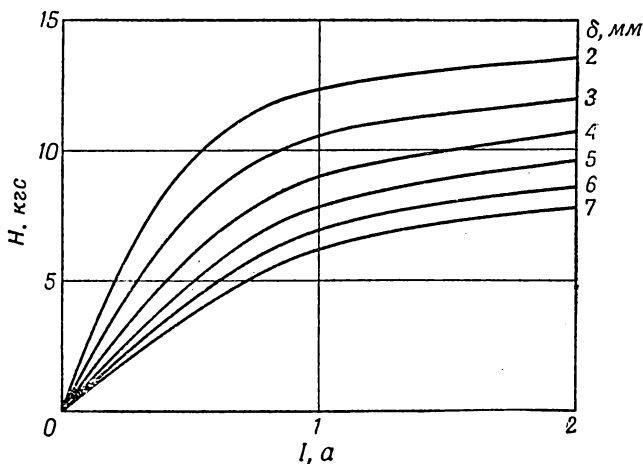
трубки не должен быть очень большим; в применявшемся приборе он равнялся 5,25 мм. В момент ввода пузырька наблюдались небольшие флуктуации скорости. В связи с этим пузырек должен пройти некоторое расстояние вдоль трубки (9 см), прежде чем он поступит в мерный участок CD , длина которого в данном аппарате равнялась 37 см. Совершенно необходимо, чтобы стенки трубки были чистыми и сухими; очистка и сушка трубок осуществлялась тем же способом, как и в случае испытуемых капиллярных трубок. Вводимый в трубку воздух также должен быть сухим, поэтому он подавался через трубку T с влагопоглотителем. Перед входом в прибор монтировался патрубок для гашения колебаний, обусловленных вводом пузырька в поток.

Выходной конец трубки также был снабжен патрубком, через который пузырек удалялся после того, как он проходил участок CD .

Рассмотренный здесь прибор, как уже отмечалось, использовался главным образом для быстрой проверки показаний дроссельного расходомера. При такой проверке показания манометров дроссельного расходомера всегда снимались в процессе движения пузырька, поскольку наличие пузырька в потоке приводило к небольшому уменьшению скорости потока. Точность измерений с помощью такого прибора «пузырькового» типа обычно равнялась $\sim 0,5\%$.

§ 3. Электромагнит

Конструкция магнита показана на фиг. 2. Участок с магнитным полем имел длину 36 см и высоту 1,67 см. Зависимость напряженности магнитного поля от силы



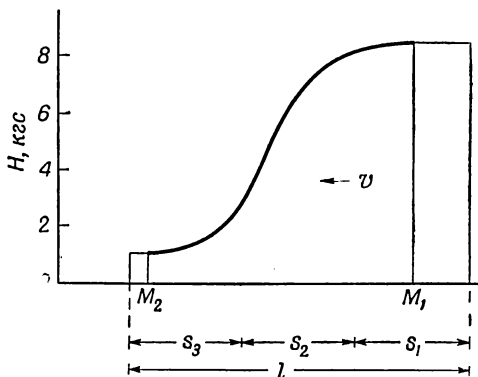
Фиг. 5. Зависимость напряженности поля от силы тока и величины воздушного зазора.

тока возбуждения определена для воздушных зазоров δ величиной 2, 3, 4, 5, 6 и 7 мм. Эта зависимость графически представлена на фиг. 5 (по оси абсцисс отложен

ток возбуждения). Следует отметить, что при величине воздушного зазора 2 мм и напряженности магнитного поля $H = 8000$ гс напряженность поля в точках, удаленных от концов полюсных наконечников на расстояние 3 см, лишь на 1,5% меньше, чем в центральной точке поля. Эта неравномерность в конечном счете благодаря искусственному ослаблению напряженности поля в центре была уменьшена до 0,7%. Нет никаких сомнений в том, что такая неоднородность поля вполне допустима для наших целей. Известно, что напряженность поля, если не приняты соответствующие меры, не является функцией только тока возбуждения. В каждом конкретном случае заданная величина напряженности поля получалась в результате медленного периодического изменения силы намагничивающего тока, когда амплитуда изменения силы тока постепенно уменьшалась до нуля. Этот же метод применялся и для размагничивания магнита, когда необходимо было определить перепад давления, соответствующий нулевой напряженности поля.

В связи с описанием электромагнита следует упомянуть о наблюдениях, в которых исследовалось влияние неравномерности поля на перепад давления в потоке. Из трех серий магнитных катушек (см. фиг. 2) серия, расположенная за выходным концом исследовавшегося канала, была обесточена. В этом случае кривая напряженности поля имела вид, показанный на фиг. 6, где M_1 и M_2 — точки, в которых располагались штуцеры для подключения манометрических трубок. Направление потока в канале показано стрелкой. Таким образом, поток вначале проходил область, в которой напряженность поля велика, а затем область с более слабым полем. При тех значениях объемного расхода или, что то же самое, при тех значениях числа Рейнольдса R , когда течение было ламинарным, наблюдаемый перепад давления отличался от перепада давления, имеющего место в случае однородного магнитного поля, напряженность которого равна средней напряженности поля (средняя напряженность поля $H = 4800$ гс), и соответствовал перепаду давления, имеющему место в случае поля более высокой напряженности $H = 5200$ гс (ср. фиг. 9—18). С другой стороны, если обесточивалась серия катушек около входного конца, так что течение происходило в направлении, в котором напряженность поля возрастает, то наблюдаемый перепад давления соответствовал более низкой напряженности однородного поля ($H = 5700$ гс), чем средняя ($H = 5900$ гс). Объяснением этих результатов может служить тот известный факт, что изменение поля скоростей, от которого зависит перепад давления, происходит с некоторым запаздыванием. После скоростей, соответствующее величине магнитного поля во

входной части канала, в значительной степени сохраняется и после того, как поток минует входную область.



Фиг. 6. Неоднородное магнитное поле, создающееся при обесточивании одной пары магнитных катушек.

На основании опытов, рассмотренных здесь, был сделан вывод о том, что дополнительный перепад давления, обусловленный неравномерностью поля, показанной на фиг. 6, практически неощутим, несмотря на чрезвычайно выраженную неоднородность поля. Таким образом, для того, чтобы исключить появление этого дополнительного перепада давления, достаточно иметь даже меньшую однородность поля, чем та, которая была создана для иллюстрации в изложенных выше экспериментах.

§ 4. Исследуемые трубки и каналы

В настоящих экспериментах испытывались пять цилиндрических стеклянных трубок, значащихся в табл. 2 под № 11—15. Эти трубки были выбраны из большого запаса и тщательно прокалиброваны. Относительное изменение диаметра каждой трубки на том ее участке, на котором измерялся перепад давления, не превышало 0,5%. Длина этого участка равнялась 28 см и он, разумеется, целиком располагался внутри области с однородным магнитным полем. Полная длина трубки равня-

Таблица 2

Параметры экспериментальных каналов

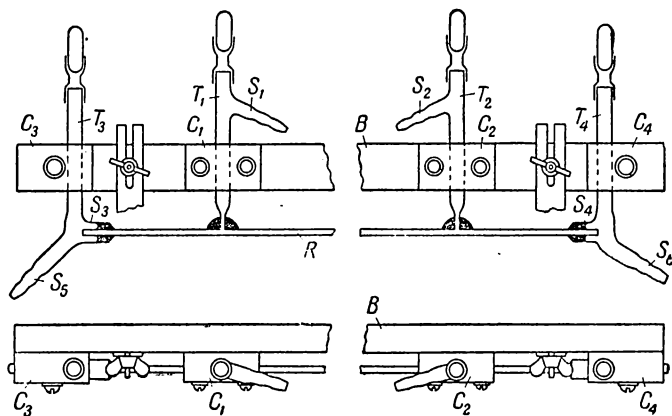
№	r , см	L , см	$\nu_T \cdot 10^5$, при 20° С	$\nu_L \cdot 10^5$, при 20° С
11	0,0345	28,02	113	115
12	0,0583	27,93	121	121
13	0,0923	28,00	114	127
14	0,1147	28,02	123	—
15	0,1647	28,00	117	—

№	a , см	b , см	a/b	$\nu_L \cdot 10^5$, при 20° С
K21	0,030	0,186	0,161	137
K22	0,014	0,0625	0,224	99
K23	0,0145	0,254	0,057	112
K24	0,090	0,060	1,50	—
K25	0,090	0,035	2,57	130
K26	0,091	0,1075	0,846	167
K27	0,091	0,081	1,12	170
K28	0,091	0,0915	0,995	164
K29	0,154	0,0415	3,71	145
K30	0,155	0,060	2,58	159
K31	0,155	0,1345	1,15	250
K32	0,056	0,0935	0,60	130
K33	0,057	0,058	0,99	130
K34 } Cu	0,155	0,030	5,16	178
K35 }	0,155	0,0525	2,95	75
K36	0,157	0,0338	4,65	95
K37	0,157	0,042	3,75	135
K38	0,157	0,055	2,88	158

лась 43 см, длины участков трубки, расположенных по одну и по другую стороны от мерного участка, составляли 7,5 см. При этом 6 см из 7,5 см входного участка трубки и 2 см выходного участка также располагались в области с магнитным полем. Кромка исследуемой трубки сохранялась острой для того, чтобы обеспечить

переход от ламинарного течения к турбулентному при определенном значении скорости или числа Рейнольдса. Толщина стенки трубки выбиралась минимально возможной (порядка 0,8 мм) с целью уменьшения воздушного зазора электромагнита и, следовательно, получения максимально возможной напряженности магнитного поля.

Для подключения манометрических трубок на концах мерного участка длиной 28 см были сделаны отверстия.

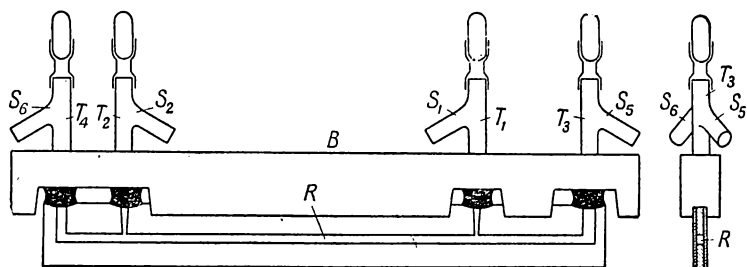


Фиг. 7а. Установка исследуемых круглых стеклянных трубок.

Расточка отверстий с помощью вращающейся без бие-ния медной пробки, на плоский конец которой наносится масло и карборунд, требует определенного навыка. Целесообразной мерой предосторожности перед расточкой (для уменьшения вероятности разрушения трубки) является слабый отжиг трубки в светящемся газовом пламени.

Способ установки трубки очевиден из фиг. 7а. Здесь В — легкая деревянная рейка, к которой крепятся четыре деревянных бруска. Через два крайних бруска C_3 , C_4 пропущены две стеклянные трубки, или колонки T_3 , T_4 , каждая с довольно широким патрубком (S_3 , S_4). В этих патрубках с помощью пицены «зацементированы» концы испытываемой трубки R . Над отверстиями в испытываем-

мой трубке расположены две колонки T_1 , T_2 , поддерживаемые брусками C_1 , C_2 и скрепленные с ней также с помощью пиццина. Колонки T_1 , T_2 снабжены двумя патрубками S_1 , S_2 для подсоединения манометров с помощью резиновых трубок. Поток ртути подводится к испытываемой трубке через патрубок S_5 и выводится через патрубок S_6 . Колонки T_1 , T_2 , T_3 , T_4 используются в качестве ловушек для частичек пыли и мельчайших пузырьков воздуха. В верхней части колонки закрываются пробками, изготовленными из стеклянных трубок.

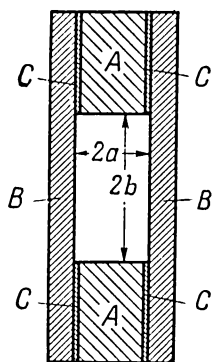


Фиг. 76. Установка каналов прямоугольного сечения.

Перейдем к описанию прямоугольных каналов. Их было изготовлено 18 штук. В табл. 2 они значатся под № $K21$ — $K38$. Для канала $K21$ расстояние между патрубками для подключения манометров равнялось 28 см, для всех остальных каналов — 14 см. Полная длина каналов, у которых расстояние между патрубками было 14 см, равнялась 20 см, и канал целиком находился в области с однородным магнитным полем. На фиг. 76 показана схема установки канала. Для того чтобы разобраться в этой схеме, достаточно пояснений, которые были сделаны при рассмотрении фиг. 7а. Отметим только, что расстояние между колонками T_1 и T_3 равнялось 4 см, между T_2 и T_4 — 2 см и что поток имел направление от T_1 к T_2 .

На фиг. 8 показано поперечное сечение канала. Канал образован пластинами BB и вставками AA . В каналах $K34$ и $K35$ вставки AA были изготовлены из меди;

поверхности, образующие верхнюю и нижнюю стенки канала, в этом случае покрывались амальгамой. Указанные каналы изготавливались в точном соответствии с тем



Фиг. 8. Поперечное сечение исследуемого канала.

типом канала, применительно к которому была разработана теория. Во всех остальных каналах вставки AA были сделаны из дерева или фибры. В каналах $K21—K28$ пластины BB были стеклянными, во всех остальных — целлулоидными. Между вставкой A и пластиной B имеется слой клея C ; обычно для склеивания применялся асфальтовый лак. После склеивания деталей A и B лак, как правило, попадал внутрь канала, и его приходилось осторожно удалять с помощью небольшого смоченного бензолом ватного тампона, который проталкивался или протягивался через канал. Размер $2b$ измерялся с помощью микроскопа, а значение размера $2a$ вычислялось по общей толщине канала и толщине пластин B .

II. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

§ 1. Результаты экспериментов

Для каждой трубки или канала при различных значениях объемного расхода V или числа Рейнольдса R была получена зависимость перепада давления между патрубками от напряженности магнитного поля. Для цилиндрической трубки число Рейнольдса определяется следующим образом:

$$R = \frac{vr}{\nu} = \frac{V}{\pi r \nu}, \quad (1)$$

где v — средняя скорость в данном сечении трубки, $см/сек$; r — радиус сечения трубки, $см$; $\nu = \eta/\rho$ — динамическая вязкость, т. е. отношение вязкости к плотности в единицах CGS. Для канала прямоугольного сечения

($2a \times 2b$) r означает гидравлический радиус, определяемый выражением

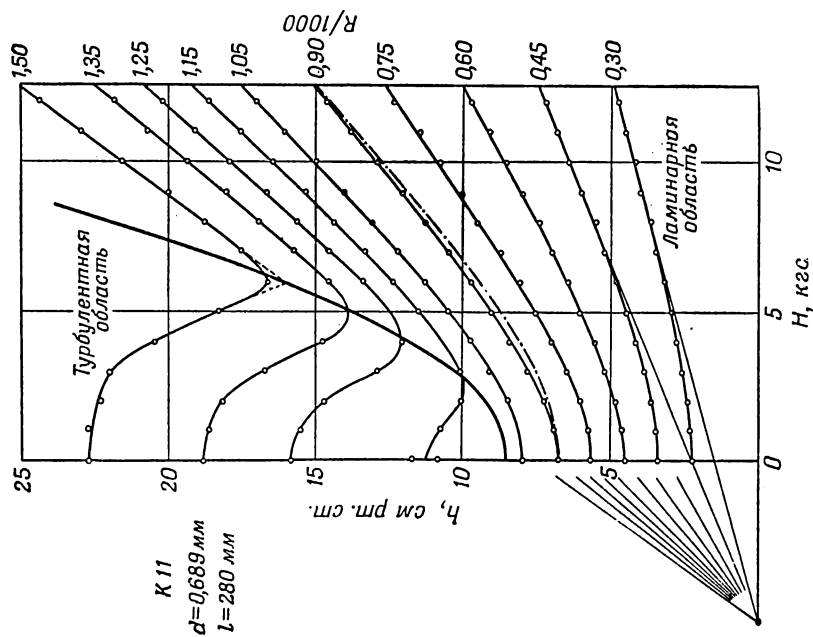
$$r = \frac{2F}{O} = \frac{2ab}{a+b}, \quad (2)$$

где F — площадь, а O — периметр поперечного сечения.

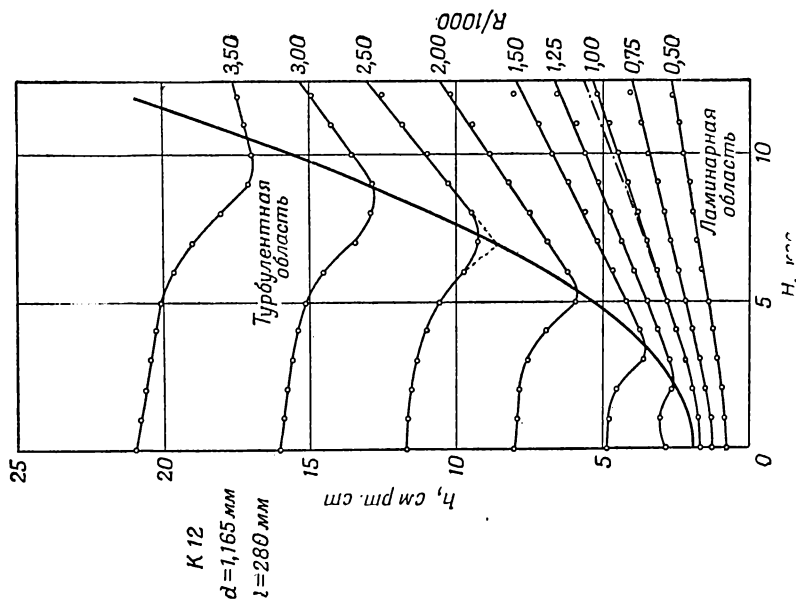
Результаты экспериментов с каждой трубкой или каналом представлены в виде семейства кривых; при этом по оси абсцисс откладывалась напряженность магнитного поля H , а по оси ординат — перепад давления между патрубками h , измеренный в см рт. ст. Исчерпывающая сводка результатов дана в виде графиков на фиг. 9—18. На каждой фигуре указаны как размеры трубки или канала, так и значение длины l (в табл. 2 соответственно L), на которой измерялся перепад давления.

Известно, что турбулентное течение в трубе переходит в ламинарное, когда величина скорости или числа Рейнольдса становится меньше некоторого определенного значения. В качестве такого значения числа Рейнольдса можно принять значение $R = 1160$. С другой стороны, ламинарное течение может быть сохранено даже в том случае, когда число Рейнольдса значительно превысит свое критическое значение, при условии, что входной участок трубы является гладким и приняты другие меры, исключающие внесение в поток каких бы то ни было возмущений. В рассматриваемых экспериментах кромки трубки или канала сознательно сохранялись острыми с тем, чтобы обеспечить в каждом случае четко выраженный переход от ламинарного течения к турбулентному.

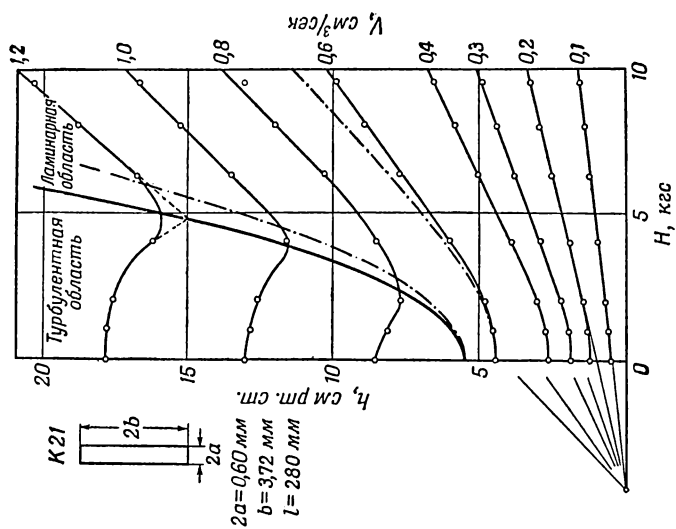
На графиках фиг. 9—18 этот переход ясно виден во всех случаях, где наблюдается турбулентное течение. Через все точки перехода проведена кривая. Выше и левее этой кривой, имеющей вид параболы, располагается область турбулентного течения, а ниже и правее — область ламинарного течения. В первой области перепад давления, а также кажущаяся вязкость при увеличении напряженности магнитного поля уменьшаются. Это происходит вследствие того, что магнитное поле оказывает гасящее действие на вихри. В области ламинарного



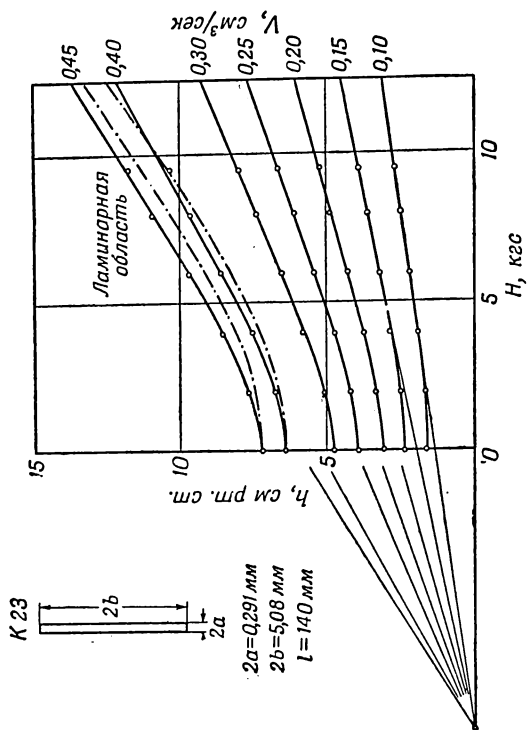
Фиг. 9.



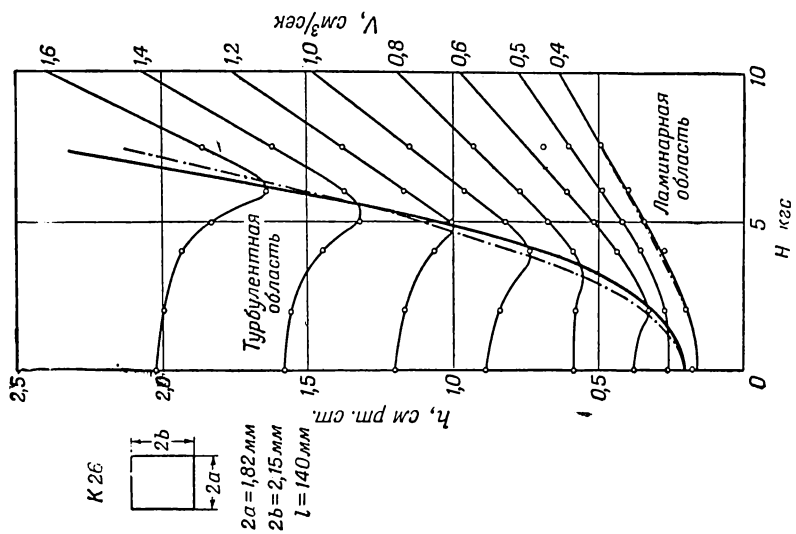
Фиг. 10.



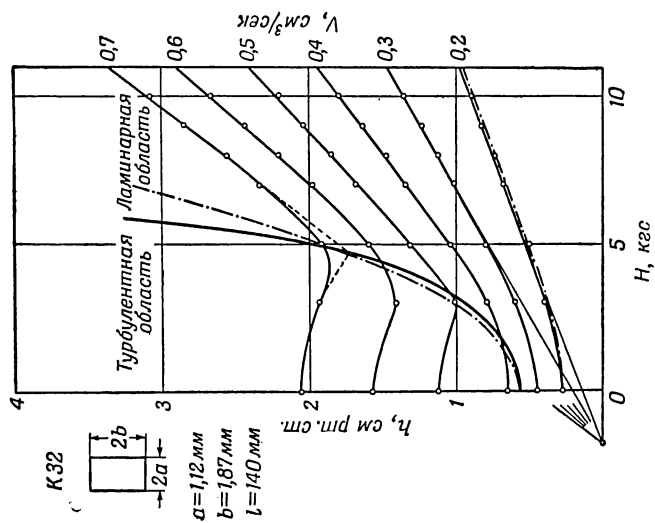
Фиг. 12.



Фиг. 11.

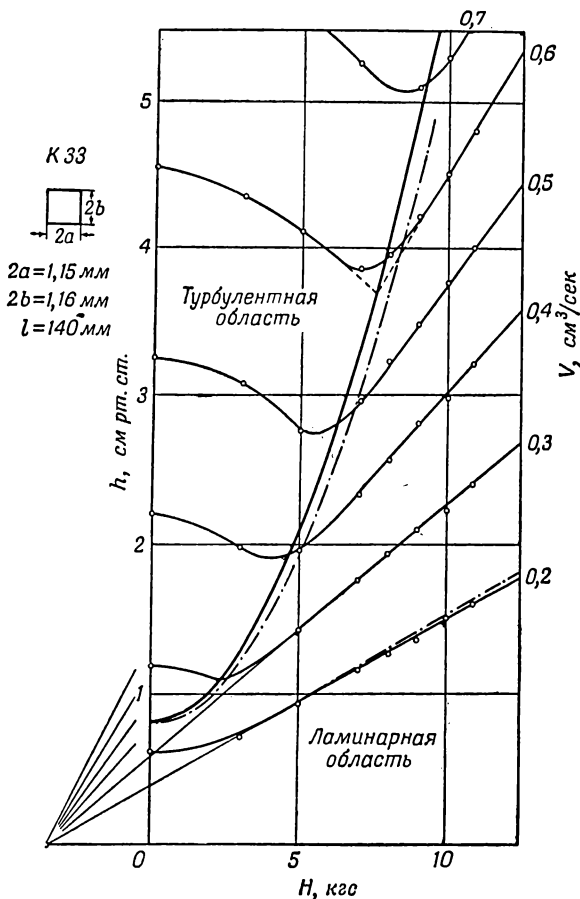


Фиг. 13.



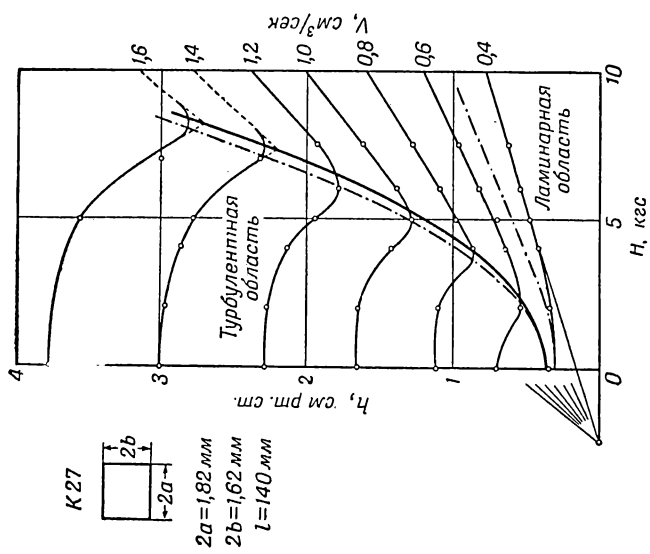
Фиг. 14.

течения перепад давления с увеличением напряженности магнитного поля быстро возрастает. В тех случаях, когда

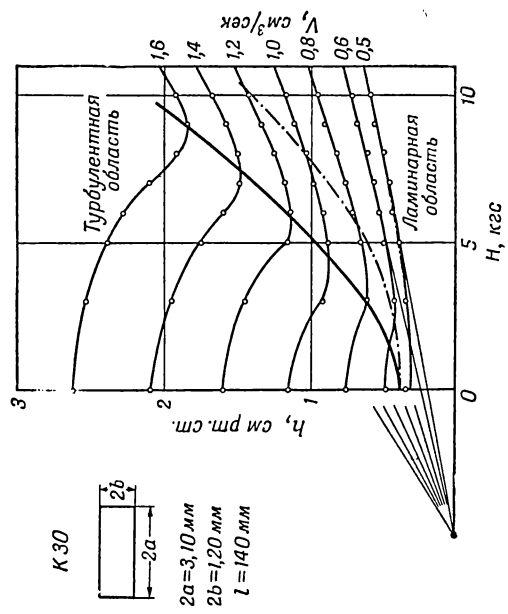


Фиг. 15.

течение при отсутствии магнитного поля все еще является ламинарным, в результате воздействия на поток довольно умеренного поля, можно легко получить перепад давления, вдвое превышающий перепад при $H = 0$.

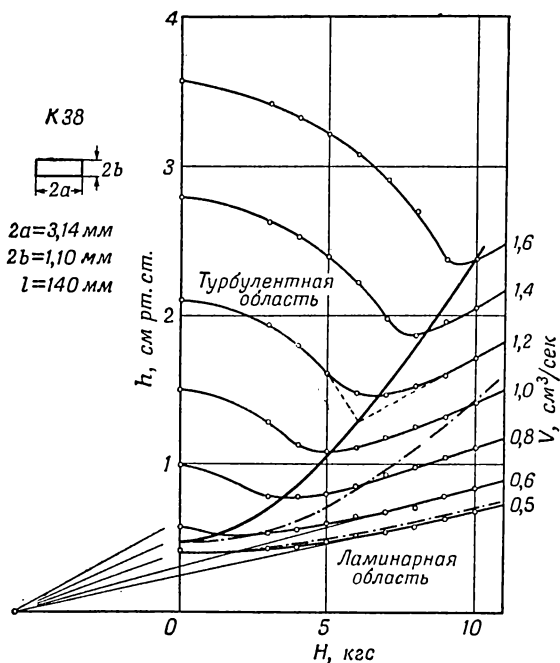


Ф и г. 16.



Ф и г. 17.

В самом деле, анализ графиков показывает, что, увеличивая напряженность поля, можно получить сколь угодно большое значение перепада давления, так как при достаточно больших магнитных полях перепад давления,



Фиг. 18.

очевидно, приблизительно пропорционален напряженности поля. Можно сделать следующий вывод: влияние магнитного поля на ламинарный поток проявляется в увеличении кажущейся вязкости; это увеличение приблизительно пропорционально напряженности поля. При слабых магнитных полях величина кажущейся вязкости в ламинарной области изменяется по параболическому закону. Установленные здесь факты можно теперь сравнить с выводами теории, на которую мы ссылались во введении. Необходимо помнить, однако, что эта теория

основывается на определенных упрощающих предположениях, и хорошего соответствия между расчетными и экспериментальными данными можно ожидать лишь в тех случаях, когда эти предположения оказываются справедливыми.

§ 2. Сравнение с теорией

Остановимся на главных выводах теории. При ламинарном течении электропроводной жидкости с объемным расходом V см³/сек в узком канале прямоугольного сечения $2a \times 2b$ см² ($b \gg a$), помещенном в однородное магнитное поле напряженностью H гс, которое нормально к стенке с большей площадью ($2b$), падение давления p определяется формулой

$$p = \frac{3VL}{4ba^3} \eta'_e \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (1)$$

где

$$\eta'_e = \frac{\eta}{3} \frac{z_0^2 \operatorname{th} z_0}{z_0 - \operatorname{th} z_0} = \frac{\eta}{3} f(z_0), \quad (2)$$

где в свою очередь

$$z_0^2 = 10^{-9} \frac{H^2 a^2}{\eta \kappa}. \quad (3)$$

Здесь L — длина той части канала, на которой измеряется перепад давления, κ — удельное сопротивление жидкости, а η'_e — кажущаяся или эффективная вязкость жидкости в магнитном поле при данных условиях. При $z_0 \ll 1$ выражение для кажущейся вязкости можно записать в виде

$$\eta'_e = \eta + \eta_e = \eta + \frac{1}{15} \cdot 10^{-9} \frac{H^2 a^2}{\kappa}, \quad (2a)$$

откуда следует, что кажущаяся вязкость η'_e складывается из «обычной» вязкости при нулевом поле и добавочной «магнитной» вязкости, пропорциональной квадрату напряженности поля. Аналогичным образом можно представить эффективный перепад давления. Если $z_0 \gg 1$ (сильные поля), выражение для η'_e принимает вид

$$\eta'_e = \frac{1}{3} \sqrt{10^{-9} H a} \sqrt{\frac{\eta}{\kappa}} + \frac{\eta}{3}, \quad (2b)$$

т. е. в этом случае кажущаяся вязкость η'_e , а также перепад давления зависят от напряженности поля линейно. Таким образом, выводы теории о поведении ламинарного течения в однородном магнитном поле, очевидно, находятся в качественном соответствии с экспериментальными данными. Хорошего количественного соответствия можно ожидать только для плоских каналов, т. е. каналов с малыми значениями a . Графики фиг. 11 соответствуют такому каналу, и именно в этом случае обнаруживается наиболее точное совпадение расчетных и экспериментальных данных, о котором можно судить из непосредственного сравнения экспериментальной и расчетной кривой для значения расхода $V = 0,4 \text{ см}^3/\text{сек}$. Следует отметить, что верхняя и нижняя стенки рассматриваемого канала не были изготовлены из материала с очень хорошей электропроводностью, как это принимается в теории. Тем не менее данное обстоятельство, по-видимому, не существенно, если высота канала значительно превышает его ширину, поскольку в этом случае, когда проводящие стенки заменяются слоями ртути, прилегающими к нижней и верхней стенкам канала, электрические токи практически остаются прямолинейными почти по всей высоте сечения.

Теперь эксперименты охватывают не только такие случаи, для которых предположения теории в достаточной мере удовлетворяются, но также и случаи, когда исследуемая конфигурация очень сильно отличается от теоретической модели плоского канала, помещенного в постоянное поперечное магнитное поле. Эти эксперименты включают даже исследование течений в круглых трубках. В таких случаях, очевидно, нельзя ожидать, что теоретические результаты, определяемые соотношениями (1) — (3), будут применимы непосредственно. Указанные соотношения необходимо так или иначе видоизменить, и в дальнейшем мы будем заниматься именно такой модификацией. Разделим эту задачу на две части. Перепад давления в см рт. ст. , являющийся непосредственно измеряемой величиной, выражается согласно (1) и (2) следующим образом:

$$h = \frac{3VL\eta}{4ba^3\rho g} \cdot \frac{f(z_0)}{3} \text{ см рт. ст.} \quad (4)$$

Коэффициент перед $f(z_0)/3$ есть просто выражение для перепада давления h_0 в узком канале при отсутствии магнитного поля. Если канал не является узким или если он представляет собой круглую трубку, то коэффициент перед $f(z_0)/3$ в формуле (4), очевидно, следует заменить подходящим выражением, соответствующим рассматриваемому каналу. Функция $f(z_0)/3$ определяет изменение перепада давления в результате воздействия магнитного поля (при ламинарном течении). В соответствии с этим при $H=0$ $f(z_0)/3 = 1$. Необходимо отметить, что характер кривых $h-H$ во всех случаях почти один и тот же. Это дает основания полагать, что функция $f(z_0)/3$, определенная для специального случая — плоского канала, может быть модифицирована для использования в других случаях путем введения соответствующего поправочного коэффициента для переменной z_0 (или H).

Высказанные здесь соображения подвергаются проверке в последующих разделах.

§ 3. Течение при отсутствии магнитного поля

В случае круглой трубки радиуса r коэффициент перед $f(z_0)/3$ в формуле (4) предыдущего раздела заменяется выражением

$$h_0 = \frac{8LV\gamma}{\pi r^4 g} = \frac{8L\gamma^2}{r^3 g} R, \quad (1)$$

где γ — динамическая вязкость, а R — число Рейнольдса, определяемое выражением

$$R = \frac{vr}{\gamma}. \quad (2)$$

Перепад давления в каналах прямоугольного сечения (со сторонами $2a$ и $2b$) при отсутствии магнитного поля рассчитывается следующим образом.

Закон Пуазейля для ламинарного течения в круглой трубе, т. е. уравнение (1), можно записать в виде

$$\frac{2hr g}{Lv^2} \cdot \frac{vr}{\gamma} = \psi \cdot R = 16, \quad (3)$$

где ψ и R — безразмерные величины. Для канала прямоугольного сечения со сторонами $2a$ и $2b$ можно использо-

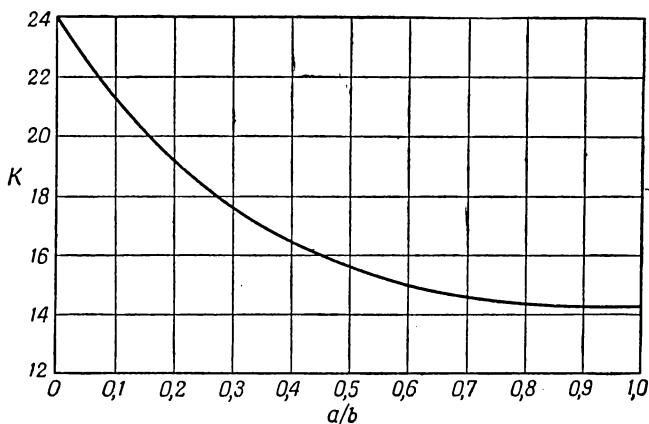
вать такую же форму записи закона сопротивления

$$\psi R = K, \quad (4)$$

где вместо r стоит величина гидравлического радиуса, равная по определению удвоенному отношению площади сечения к периметру. В этом случае величина K является функцией отношения a/b ; ее график был дан Ли и Тадром [3] и воспроизводится нами на фиг. 19. Для плоских каналов, т. е. в случае $b = \infty$, гидравлический радиус равен $2a$ и из соотношения (4) с учетом того, что $K = 24$ (фиг. 19), получим

$$h = \frac{3}{4} \frac{Lv}{ba^3g} V \quad (\text{плоский канал, } a \ll b). \quad (5)$$

Эту формулу можно вывести непосредственно для каналов квадратного сечения ($a=b$), гидравлический радиус



Фиг. 19. Зависимость параметра $K = \psi R$ от отношения сторон a/b для трубок прямоугольного сечения [1].

которых равен a . В этом случае, согласно фиг. 19, $K=14,22$ и соотношение (4) можно записать в виде

$$h = 1,78 \frac{Lv}{a^4g} V \quad (\text{канал квадратного сечения, } a = b). \quad (6)$$

Это выражение является частным случаем более общей зависимости, полученной Буссинеском и подтвержденной

экспериментально Шиллером [4]. Выражение для перепада давления в общем случае имеет вид

$$h = \frac{K}{32} \cdot \frac{Lv}{g} \cdot \frac{(a+b)^2}{a^3b^3} V. \quad (7)$$

Строя теперь по данным фиг. 9—18 графики зависимости перепада давления от R или V для ламинарного течения при $H=0$, получаем прямые линии, по углу наклона которых с помощью соотношений (1) и (7) можно определить значения динамической вязкости ν . Полученные таким образом значения ν приведены в табл. 2 (где они обозначены через ν_L). Значения ν для круглых трубок по порядку величины почти не отличаются от $117 \cdot 10^{-5}$ — обычного значения динамической вязкости ртути, при 20°C . Для каналов прямоугольного сечения разброс значений ν достаточно велик. Это, вероятно, объясняется трудностями изготовления и очистки каналов.

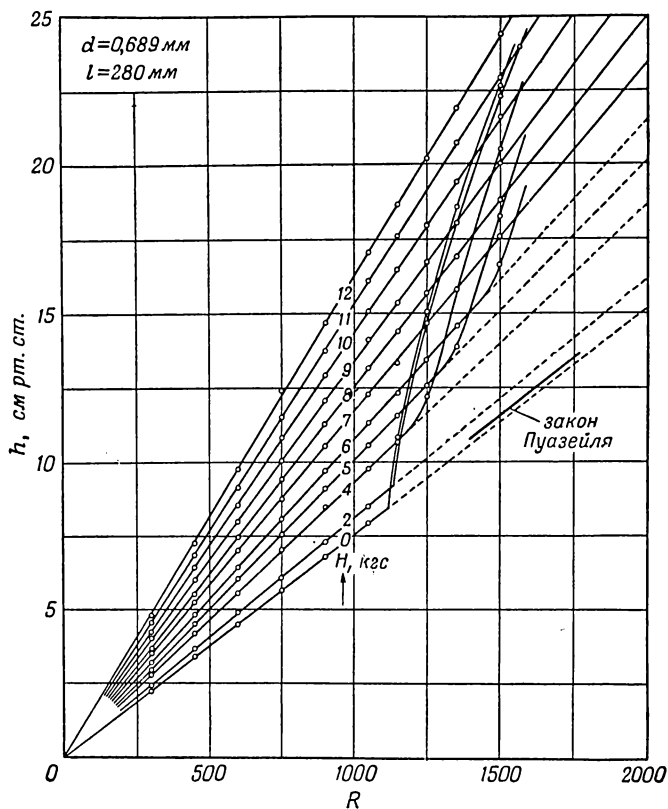
Значения ν можно также вычислить по измеренным при $H=0$ значениям перепада давления в круглых трубках при турбулентном течении, учитывая эмпирическое соотношение для турбулентного потока, которое было получено Блазиусом. Это соотношение имеет вид

$$h = 0,06652 v^{7/4} R^{-5/4} \nu^{-1/4} g^{-1}. \quad (8)$$

В табл. 2 приведены значения ν , вычисленные из соотношения (8) (они обозначены через ν_T). Как видно из таблицы, эти значения хорошо согласуются со значениями динамической вязкости, определенными по данным для ламинарной области.

На фиг. 20 показана зависимость перепада давления h от числа Рейнольдса R . Кривые получены из графиков фиг. 9, относящихся к круглой трубке. Можно видеть, что для ламинарного потока при $H=0$ величина h строго пропорциональна R в соответствии с законом Пуазейля (1).

Сказанное справедливо, однако, не только при $H=0$, но и при любых значениях H . На фиг. 20 графики зависимости h от R построены также и для турбулентного потока. При $H=0$ переход от одного режима течения к другому происходит при $R=1120$, т. е. при значении числа Рейнольдса, только незначительно отличающемся от общепринятого критического значения $R=1160$.



Фиг. 20. Зависимость перепада давления от числа Рейнольдса.

§ 4. Модификация функции $f(z_0)$, приводящая к лучшему соответствию между теоретическими и экспериментальными данными

Расчетную зависимость для перепада давления в плоском канале можно теперь записать в общем виде

$$h = h_0(V) \frac{f(z_0)}{3}, \quad (1)$$

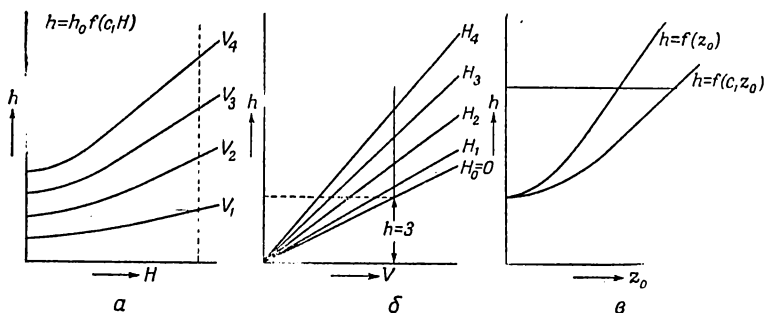
где $h_0(V)$ — перепад давления при $H=0$, пропорциональный объемному расходу (или числу Рейнольдса).

Попытаемся распространить расчетную зависимость (1) на каналы, отличные от плоского. При этом мы сначала постараемся установить, нельзя ли представить перепад давления зависимостью вида

$$h = h_0(V) \frac{f(c_1 z_0)}{3}, \quad (2)$$

где c_1 — множитель, зависящий в случае каналов прямоугольного сечения только от величины отношения a/b .

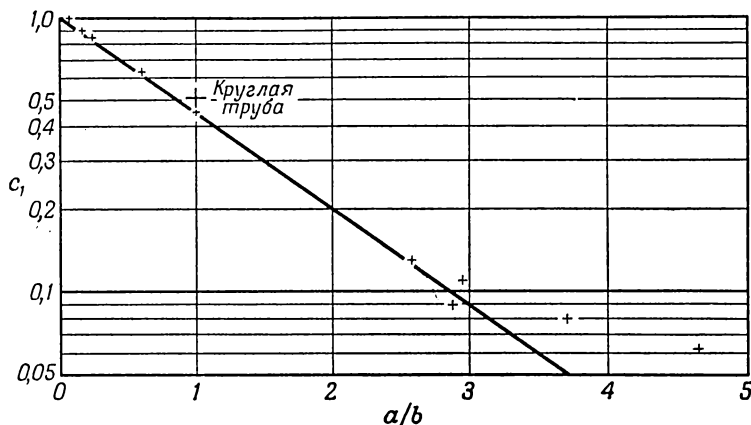
Процедура, с помощью которой исследуется возможность такого представления, заключается в следующем.



Фиг. 21. Графики, поясняющие модификацию теории.

Начнем с рассмотрения семейства экспериментальных кривых типа приведенных на фиг. 9—18 (фиг. 21, а). Из этого семейства можно получить другое семейство кривых (фиг. 21, б), аналогичных кривым фиг. 20. С помощью последнего семейства можно построить кривую $h - H$, соответствующую значению $h_0(V) = 3$. Способ построения этой кривой понятен из фигуры. Построенная таким образом кривая является графиком зависимости $h = f(c_1 z_0)$ от величины H , а не z_0 . Так как $z_0^2 = (H^2 a^2 / \eta \chi) \cdot 10^{-9}$, для $\eta = 0,0159$ CGS и $\chi = 1 \cdot 10^{-4}$ ом \times см (20°C) получим $z_0 = 0,025$ аН. Воспользовавшись последним соотношением, перестроим кривую $h - H$ в кривую $h - z_0$ и получим таким образом кривую, кото-

рую попытаемся выразить в виде $h = f(c_1 z_0)$. Такая кривая показана на фиг. 21, в. На этой фигуре приведены также теоретическая кривая $h = f(z_0)$. Для ряда значений h вычислено отношение соответствующих абсцисс кривых $h = f(z_0)$ и $h = f(c_1 z_0)$. Установлено, что это отношение c_1 с достаточной степенью точности можно считать постоянным и не зависящим от h или z_0 . Таким образом, умножая абсциссы экспериментально полученной



Фиг. 22. Зависимость коэффициента корреляции c_1 от отношения сторон a/b .

кривой $h - z_0$ на постоянный коэффициент, можно свести ее к кривой, соответствующей плоскому каналу (для которой $c_1 = 1$). Мы можем также выразить перепад давления в канале прямоугольного сечения, помещенном в однородное магнитное поле, в общем случае, в виде (2).

Значение c_1 зависит, разумеется, от величины отношения сторон поперечного сечения канала a/b (сторона a параллельна магнитным силовым линиям). Зависимость c_1 от a/b показана на фиг. 22. Вплоть до значения $a/b = 3$ эта зависимость в полулогарифмических координатах может быть представлена прямой линией

$$c_1 = 10^{-0,35 \frac{a}{b}}. \quad (3)$$

Таким образом, для перепада давления в канале прямоугольного сечения выражение при ламинарном течении можно окончательно записать в виде

$$h = h_0 \frac{f\left(z_0 \cdot 10^{-0,35 \frac{a}{b}}\right)}{3} \text{ см рт. ст.}, \quad \frac{a}{b} < 3, \quad (4)$$

где функция f определяется формулой

$$f(x) = x^2 \frac{\frac{\operatorname{th} x}{x}}{1 - \frac{\operatorname{th} x}{x}}. \quad (5)$$

Перепад давления в круглых трубках при ламинарном течении также можно выразить в виде (2). Найдено, что в этом случае независимо от величины радиуса трубки r (по крайней мере при $0,35 < r \text{ мм} < 0,92$) следует задаваться значением $c_1 = 0,51$. Таким образом, перепад давления в круглых трубках при ламинарном течении будет определяться формулой

$$h = h_0 \frac{f(0,51z_0)}{3} \text{ см рт. ст.} \quad (6)$$

Отметим, что фигурирующая в формуле (6) величина z_0 связана с напряженностью поля H соотношением

$$z_0 = 0,025rH, \quad (7)$$

где r — радиус поперечного сечения трубки.

Чтобы проиллюстрировать соответствие между кривыми зависимости h от H , построенными по соотношениям (4) и (6) и полученными экспериментально, на каждой из фиг. 9—18¹⁾ нанесена теоретическая кривая (штрих-пунктирная линия). Как видно из этих фигур, соответствие в большинстве случаев довольно хорошее. Следует отметить, что расчетные кривые построены при тех же значениях h_0 , что и экспериментальные. Таким образом, возможная погрешность определения величины h_0 во внимание не принималась.

¹⁾ Сравнение на фиг. 11¹ проводилось для кривых, соответствующих объемному расходу $V = 0,45 \text{ см}^3/\text{сек.}$

В связи с настоящим обсуждением можно остановиться на специфическом свойстве экспериментальных кривых, представленных на фиг. 9—18. Если, как показано на фигурах, провести касательные к нескольким кривым каждого семейства при одном и том же значении абсциссы ($H = 8000 \text{ гс}$), то обнаруживается, что все эти касательные пересекаются в одной точке оси абсцисс (или с незначительным разбросом). Это свойство непосредственно следует из теории, независимо от того, рассматриваем ли мы ее в первоначальном или модифицированном виде. Согласно результатам теории, можно записать

$$h = CVf(c_1 z_0), \quad z_0 = 0,025aH. \quad (8)$$

Из этого выражения следует, что

$$\frac{dh}{dH} = \frac{dh}{dz_0} \frac{dz_0}{dH} = CV \cdot c_1 \cdot 0,025af'(c_1 z_0) = C_1 V. \quad (9)$$

Уравнение касательной к одной из кривых зависимости h от H в точке (H_1, h_1) имеет вид

$$\frac{h - h_1}{H - H_1} = C_1 V. \quad (10)$$

Следовательно, координата точки пересечения касательной с осью абсцисс определяется выражением

$$H' = H_1 - \frac{h_1}{C_1 V} = H_1 - \frac{1}{0,025ac_1} \frac{f(c_1 z_0)}{f'(c_1 z_0)}, \quad (11)$$

т. е. H' не зависит от V . Из формулы

$$f(z_0) = z_0^2 \operatorname{th} z_0 / (z_0 - \operatorname{th} z_0)$$

можно легко получить следующее выражение для $f'(z_0)$:

$$f'(z_0) = \frac{z_0^3 \operatorname{sch}^2 z_0 + z_0^2 \operatorname{th} z_0 - 2z_0 \operatorname{th}^2 z_0}{(z_0 - \operatorname{th} z_0)^2}. \quad (12)$$

С помощью соотношений (11), (12) и выражения для $f(z_0)$ можно проверить экспериментальные значения H' . Однако с учетом анализа, проведенного в начале данного раздела, такая проверка представляется излишней.

§ 5. Кривая, разграничивающая области ламинарного и турбулентного течений

В настоящем экспериментальном исследовании были предприняты меры, обеспечивающие переход от ламинарного течения к турбулентному при определенном значении числа Рейнольдса. Обозначим критическое значение числа Рейнольдса через R_c . Оно определяется следующим образом:

$$R_c = \frac{v_c r_h}{\nu}. \quad (1)$$

Здесь r_h — гидравлический радиус, который для канала прямоугольного сечения со сторонами $2a$ и $2b$ равен $2ab/(a+b)$. С другой стороны, критическая скорость v_c равна частному от деления объемного расхода V_c на $4ab$. Подставляя эти значения в формулу (1), можно преобразовать ее к виду

$$R_c = \frac{V_c}{2(a+b)\nu} = \frac{V_c \rho}{2(a+b)\eta}. \quad (2)$$

Если теперь течение происходит в однородном магнитном поле, то переход от ламинарного течения к турбулентному будет иметь место при более высоких значениях объемного расхода, т. е. величина V_c возрастет. Наиболее вероятное объяснение этого факта следует искать в кажущемся увеличении коэффициента вязкости η . В соответствии с этим предположением зависимость критического объемного расхода V_c от H должна иметь вид

$$V_c = \frac{2(a+b)}{\rho} R_c \cdot \eta'_e = \frac{2}{3} \frac{a+b}{\rho} R_c \eta f(z_0). \quad (3)$$

Соответствующее значение перепада давления в канале h_c определяется выражением

$$h_c = \frac{3}{4} \cdot \frac{V_c L}{ba^3} \eta'_e = \frac{1}{6} R_c \frac{a+b}{ba^3} \cdot \frac{L}{G} \cdot \nu^2 f^2(z_0). \quad (4)$$

Вместо критического числа Рейнольдса можно ввести в рассмотрение критический объемный расход V_{c0} (который имеет место при $H=0$). Для этого воспользуемся

соотношением $R_c = V_{c0} / [2(a + b)v]$; в результате получим

$$h_c = \frac{1}{12} \cdot \frac{\eta}{\rho g} \cdot \frac{V_{c0} L}{ba^3} \cdot f^2(z_0). \quad (5)$$

Напомним, что здесь $f(z_0) = z_0^2 \operatorname{th} z_0 / (z_0 - \operatorname{th} z_0)$ и $z_0 = Ha \sqrt{\kappa^{-1} \eta^{-1} \cdot 10^{-9}}$. Соотношение (5) будет определять границу между областями ламинарного и турбулентного течения в случае плоского канала ($a \ll b$). На фиг 9—18 проведены фактические граничные кривые для всех случаев, когда эксперименты проводились и в области турбулентного течения. Граничная кривая имеет вид параболы. Разумеется, нельзя полагать, что эта кривая будет представляться уравнением (5) для всех каналов. Прежде всего, из-за погрешности определения размеров каналов произведение, на которое умножается $f^2(z_0)$, вообще говоря, не будет точно соответствовать ординате граничной кривой при $H = 0$. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только формы граничной кривой и сделаем естественное предположение, что функцию $f(z_0)$ в выражении (5) необходимо заменить функцией $f(c_1 z_0)$, которая получена в предыдущем разделе. То есть мы будем предполагать, что уравнение граничной кривой для каналов прямоугольного сечения можно представить в виде

$$h = h_{0B} \frac{1}{9} \left[f\left(z_0 \cdot 10^{-0,35 \frac{a}{b}}\right) \right]^2 \text{ см рт. ст.}, \quad (6)$$

а для цилиндрических трубок —

$$h = h_{0B} \frac{1}{9} [f(0,51 z_0)]^2 \text{ см рт. ст.} \quad (7)$$

Эти допущения подвергаются проверке на фиг. 9—18 (за исключением фиг. 11), на которых экспериментальные кривые представлены сплошными линиями, а кривые, рассчитанные по соотношениям (6) или (7), — штрихпунктирными. Для цилиндрических трубок соответствие между этими кривыми настолько хорошее, что проведены только экспериментальные кривые. Для каналов прямоугольного сечения соответствие остается удовлетвори-

тельным только до тех пор, пока $a < b$. В случае $a > b$, как и следовало ожидать, имеют место значительные расхождения.

Приложение I

Проверка закона подобия Рейнольдса

Экспериментальные материалы, полученные в данном исследовании, можно использовать для проверки справедливости закона подобия Рейнольдса при течении ртути по трубкам круглого или прямоугольного сечения. Ибо каждый из графиков, примеры которых представлены на фиг. 9—18, позволяет определить зависимость перепада давления или от объемного расхода V , или от числа Рейнольдса R при $H = 0$. Мы ограничимся рассмотрением экспериментов с круглыми трубками. Десять лет назад было проведено сравнение течений ртути и воды в таких трубках; выяснилось, что закон подобия Рейнольдса остается в силе также и для ртути [2]. Проверка этого закона касалась формы кривой зависимости коэффициента сопротивления ψ_1 от числа Рейнольдса R_1 . Здесь $R_1 = vd/\nu$, где d — внутренний диаметр трубки; $\psi_1 = h/L(4v^2/gd)$, где h — падение давления в трубке на длине L . Теперь стало общепринятым определять число Рейнольдса выражением $R = vr/\nu$, где r — радиус трубки, и строить зависимость коэффициента сопротивления $\psi = h/L(v^2/gd) = 4\psi_1$ от R . Ниже мы будем придерживаться именно такой схемы. Более ранняя проверка закона подобия для ртути была проведена главным образом на трубках большого диаметра, поскольку при испытаниях с более тонкими трубками воспроизводимость результатов была плохой. Поэтому указанная проверка по существу ограничивалась частью кривой $\psi_1 - R_1$, соответствующей значениям $R_1 > 10\,000$. В последних экспериментах благодаря введению эффективного метода очистки трубок можно было исследовать без каких-либо затруднений течение в сравнительно узких трубках. Результаты этих экспериментов, следовательно, весьма удачно дополняют полученные ранее экспериментальные данные и позволяют проверить выполнение закона подобия вплоть до очень малых чисел Рейнольдса.

Такая проверка проводилась на следующих трубках:

$$K11, \quad d = 0,0689 \text{ см},$$

$$K12, \quad d = 0,1165 \text{ см},$$

$$K13, \quad d = 0,1845 \text{ см},$$

$$K15, \quad d = 0,3293 \text{ см}.$$

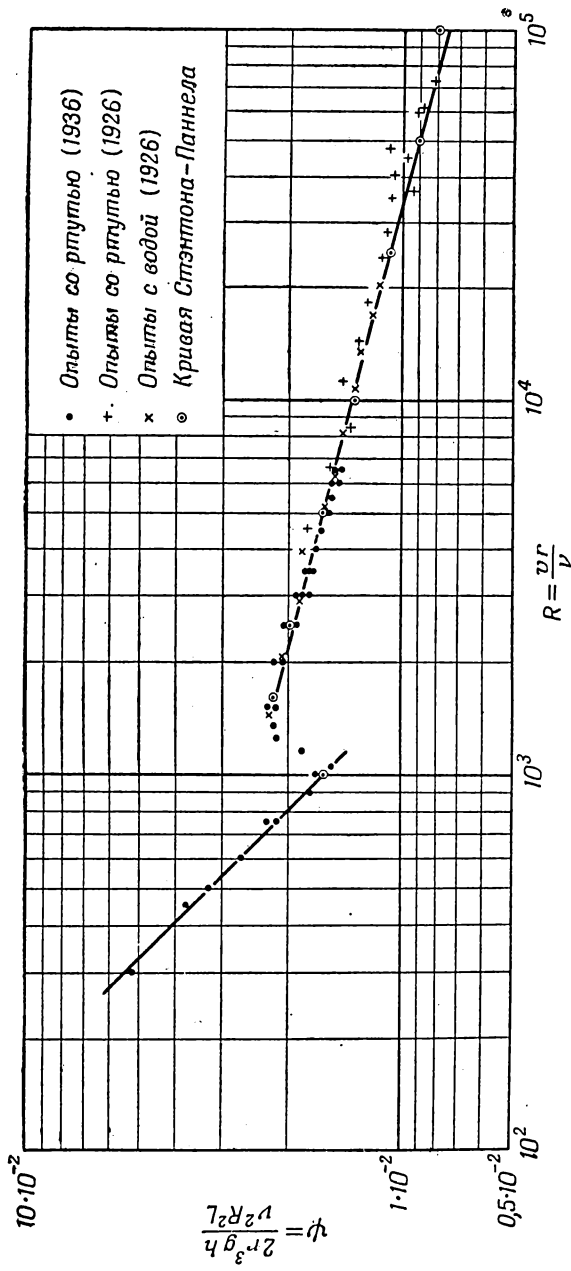
Во всех случаях падение давления в трубке измерялось на длине 28 см. Значения коэффициента сопротивления ψ вычислялись по формуле

$$\psi = \frac{2r^3 g}{L v^2} \frac{h}{R^2}, \quad (1)$$

которая получается из формулы, приведенной выше, если в последней перейти от v к R . В табл. 3 указаны

Таблица 3

$R \cdot 10^{-3}$	$\lg R$	$K11$ $\psi \cdot 10^3$	$K12$ $\psi \cdot 10^3$	$K13$ $\psi \cdot 10^3$	$K15$ $\psi \cdot 10^3$
0,30	2,477	51,8	—	—	—
0,45	2,653	35,4	—	—	—
0,50	2,699	—	32,40	—	—
0,60	2,778	26,3	—	—	—
0,75	2,875	21,2	22,48	—	—
0,90	2,954	17,48	—	—	—
1,00	3,000	—	16,68	—	—
1,05	3,021	15,08	—	—	—
1,15	3,061	18,20	—	—	—
1,25	3,097	21,40	19,40	—	—
1,35	3,130	21,75	—	—	—
1,50	3,176	21,30	21,76	21,36	22,24
2,00	3,301	—	20,20	20,12	21,68
2,50	3,398	—	18,92	19,00	20,04
3,00	3,477	—	17,92	18,08	18,76
3,50	3,544	—	17,20	17,40	17,88
4,00	3,602	—	—	16,72	16,76
4,50	3,653	—	—	16,24	16,32
5,00	3,699	—	—	15,68	15,92
5,50	3,740	—	—	15,20	15,40
6,00	3,778	—	—	14,84	15,16
6,50	3,813	—	—	14,56	14,88



Ф и г. 23. Проверка закона подобия Рейнольдса.

значения коэффициента сопротивления ϕ , а на фиг. 23 представлен график зависимости ϕ от R . На том же графике приведены точки, рассчитанные по данным более ранних экспериментов, так что диапазон чисел Рейнольдса, для которого получена кривая сопротивления $\phi - R$, простирается вплоть до значений R порядка $7 \cdot 10^4$ и приблизительно соответствует диапазону значений R , исследованному Стэнтоном и Паннелом [5]. На графике фиг. 23 нанесены точки кривой, полученной в указанной работе. Вполне очевидно, что для ртути остается в силе тот же самый закон подобия, который выполняется для жидкостей, исследованных Стэнтоном и Паннелом. Можно заметить, что для кривой, построенной по результатам испытаний со ртутью, характерна такая же незначительная вогнутость книзу, что и для кривой Стэнтона и Паннела. Если пренебречь этой кривизной и провести через экспериментальные точки прямую, обеспечивающую наилучшее приближение, то тангенс угла наклона этой прямой оказывается близок к 4 в соответствии с формулой Блазиуса. Кроме того, оказывается, что прямая линия, представляющая экспериментальные точки в области ламинарного течения, удовлетворяет, как и следовало ожидать, уравнению $\phi R = 16$.

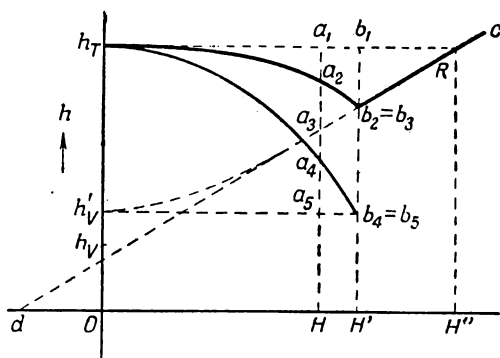
Приложение II

Влияние магнитного поля на турбулентное течение

Из графиков фиг. 9—18 видно, что в области турбулентного течения перепад давления при увеличении напряженности магнитного поля уменьшается. Это уменьшение, разумеется, связано с гашением турбулентности, однако гашение турбулентности не является единственной причиной, вызывающей изменение перепада давления. Наряду со сглаживанием турбулентных пульсаций, которое проявляется в уменьшении перепада давления, магнитное поле, несомненно, оказывает и другое воздействие на поток, известное из опытов с ламинарным течением и приводящее к увеличению перепада давления. Наблюдаемый перепад давления следует рассматривать

как результат наложения этих двух противоположных эффектов. В дальнейшем будем называть эти эффекты соответственно «эффектом гашения» и «эффектом вязкости».

Можно попытаться отделить влияние поля на турбулентность, т. е. эффект гашения. Соображения, из которых мы при этом будем исходить, можно выразить следующим образом. Кривая $h_T b_2 c$ на фиг. 24 является экспериментальной кривой перепада давления на данном участке трубы при заданном значении объемного



Фиг. 24. Схема отделения эффекта гашения от эффекта вязкости в области турбулентного течения.

расхода или числа Рейнольдса. Тогда представляется весьма вероятным, что эффект гашения, т. е. уменьшение перепада давления вследствие подавления пульсаций, пропорционален квадрату напряженности поля. То есть можно предполагать, что кривая, характеризующая эффект гашения, является просто параболой. Отсюда возникает вопрос: какой должна быть при этом кривая, представляющая эффект вязкости? Предположим, что эффект вязкости в турбулентной области характеризует кривая $h'_V a_3 b_2$. Тогда точка кривой, определяющей эффект гашения, получится в результате смещения вниз соот-

ветствующей точки a_2 экспериментальной кривой на величину отрезка a_3a_5 . Таким образом находится точка a_4 , и полной кривой, характеризующей эффект гашения, будет кривая $h_{Ta_4b_4}$. Возникает следующая задача: необходимо выбрать кривую $h'_{Va_3b_3}$ таким образом, чтобы кривая $h_{Ta_4b_4}$ оказалась параболой. При построении кривой $h'_{Va_3b_3}$ мы используем тот очевидный факт, что эта кривая должна проходить через точку b_3 . Кроме того, мы можем сделать следующие разумные предположения: 1) кривая в точке b_3 имеет общую касательную с известной ветвью кривой b_3c , 2) кривая, как отмечалось, имеет гладкую, более или менее параболическую форму, 3) в точке $H = 0$ касательная к кривой является горизонтальной и 4) рассматриваемая кривая расположена выше кривой соответствующей ламинарному потоку, т. е. ее ордината при $H = 0$ больше значения h , определяемого выражением

$$h_V = \frac{8L_V^2}{r^3g} R. \quad (1)$$

Последнее предположение требует некоторого разъяснения. При ламинарном течении профиль скоростей в поперечном сечении трубки при отсутствии магнитного поля является параболическим. При турбулентном течении, т. е. при течении, которое действительно имеет место в трубке, профиль скоростей однороден в большей части сечения трубки, а вблизи стенок скорости довольно резко уменьшаются до нуля. Такой профиль скоростей близко напоминает профиль, образующийся в ламинарном потоке под воздействием сильного магнитного поля, которое проявляется в увеличении перепада давления.

Именно на этом основании мы заключаем, что кривая, характеризующая эффект вязкости, должна проходить при $H = 0$ через точку h'_V , ордината которой больше значения h_V , вычисленного из соотношения (1).

Эксперименты с цилиндрическими трубками обрабатывались указанным выше образом. Наиболее надежные данные по перепаду давления в турбулентной обла-

сти были получены в экспериментах, проводившихся на трубках наибольшего диаметра $K13$, $K14$ и $K15$. При использовании более тонких трубок $K11$ и $K12$ данные по перепаду давления в указанной области оказывались не вполне достоверными вследствие неустойчивости течения в зоне перехода от турбулентного течения к ламинарному. Результаты, полученные при использовании трубок $K13$, $K14$ и $K15$, тем не менее являются весьма показательными. Если кривую $h'_v a_3 b_3$ провести таким образом, чтобы при $H = 0$ ордината h'_v была вдвое больше ординаты h_v , соответствующей ламинарному течению [$h_v = (8Lv^2/r^3g) \cdot R$], то кривая, характеризующая эффект гашения, становится параболой, и, как было установлено, эта парабола не зависит от величины объемного расхода. На фиг. 25 показан порядок построения кривых, характеризующих эффект гашения для трубки $K13$, а на фиг. 26 проиллюстрированы результаты проверки параболического характера кривой и независимости этой кривой от объемного расхода, т. е. от R . Из последних графиков были определены входящие в табл. 4 значения производной dh/dH^2 .

Таблица 4

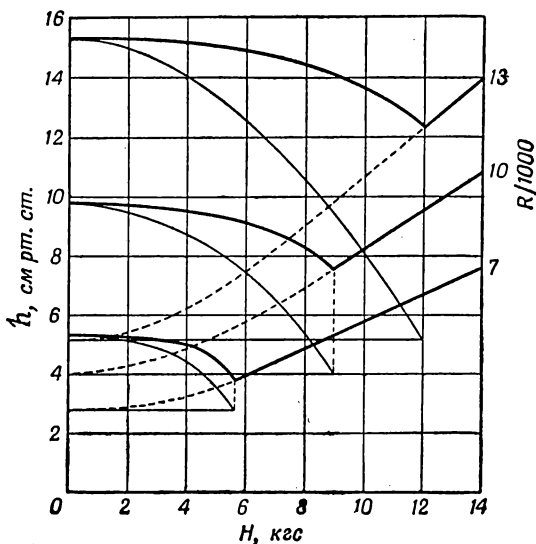
Трубка	d , см	$\frac{dh}{dH^2} \cdot 10^6$	$d \cdot \frac{dh}{dH^2} \cdot 10^6$
$K12$	0,1165	0,0960	0,0112
$K13$	0,1845	0,0722	0,0133
$K14$	0,2294	0,0571	0,0131
$K15$	0,3298	0,0422	0,0139

Результаты испытаний с трубками $K13$, $K14$ и $K15$ позволяют сделать эмпирический вывод о том, что эффект гашения может быть выражен простой формулой

$$h = 0,0134 \cdot 10^{-6} \frac{H^2}{d} (zс, см, см рт. ст.)$$

независимо от величины объемного расхода. Необходимо иметь в виду, что h представляет собой уменьшение пе-

репада давления вследствие гасящего воздействия магнитного поля на турбулентность. Следовательно, значения ординат кривой, характеризующей эффект гашения

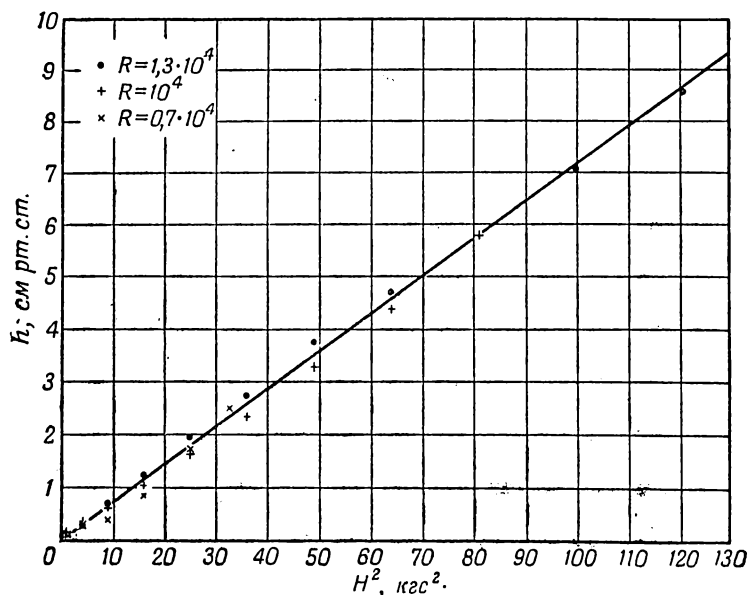


Фиг. 25. Схема построения кривых, характеризующих эффект гашения в испытаниях, проведенных с трубкой К13.

при $H = 0$ и $H \neq 0$, различны. В табл. 4 приведены также результаты, полученные при испытаниях трубки К12. Однако эти результаты менее достоверны.

Можно попытаться найти подтверждение выведенной выше простой формулы для эффекта гашения с помощью анализа размерностей. Если допустимо предположение, что уменьшение перепада давления на единицу длины вследствие этого эффекта зависит только от следующих факторов: 1) от напряженности поля H , 2) от диаметра трубки d и 3) от скорости потока v , то мы можем написать следующее соотношение:

$$\frac{h_0 g}{L} = H^r d^s v^q.$$



Фиг. 26. Проверка параболического характера кривой, характеризующей эффект гашения в испытаниях, проведенных с трубкой K13 ($d = 1,845$ мм, $l = 280$ мм), $\frac{dh}{dH^2} = 0,0722 \cdot 10^{-6}$.

Вводя в рассмотрение размерности различных величин, получим следующие уравнения для определения r , s и q : $-r/2 + s + q = -2$, $r/2 = 1$, $-r - q = -2$; откуда $s = -1$, $r = 2$, $q = 0$. Таким образом,

$$\frac{h \rho g}{L} = c_1 \cdot \frac{H^2}{d} \quad (\text{независимо от } v, V \text{ или } R)$$

или (для заданной жидкости при постоянном L)

$$h = c_2 \frac{H^2}{d},$$

как установлено выше.

Совершенно очевидно, что изложенная выше попытка отделения эффекта гашения от эффекта вязкости дол-

жна рассматриваться только как предварительный шаг в исследовании турбулентной области. Не следует также придавать слишком большого значения последним результатам, которые при более тщательном рассмотрении могут оказаться в той или иной мере ошибочными. Предполагается, что вопрос о влиянии магнитного поля на турбулентное течение будет темой следующего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hartmann J., Det Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Math.-fys. Medd., 15, No. 6 (1937).
2. Hartmann J., Lazarus F., Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Danemark, Section des Sciences, 8 Série, t X, No. 5, 1926.
3. Lea F. C., Tadros A. G., Phil. Mag (7), 11, 1235 (1931).
4. Handbuch der Experimentalphysik, IV, 4, 1932, p. 146.
5. Stanton, Pannell, Phil. Trans. Royal Soc., A214.

5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ

В. Мергетройд

W. Murgatroyd, Phil. Mag., 44, No. 359, 1348 (1953)

Дано описание экспериментов, в которых производились измерения градиента давления при течении ртути в прямоугольном канале с отношением сторон 15:1 при наличии поперечного магнитного поля. Оказалось возможным гасить турбулентность даже при максимально достижимых числах Рейнольдса ($R = 10^5$).

При больших значениях R коэффициент сопротивления C_f , видимо, является функцией M/R и β . Предполагается, что в случае, когда число R достаточно велико, коэффициент C_f может быть представлен функцией только одной комбинации параметров $M/R\beta^{1/2}$. Такая зависимость оказывается сходной с простой зависимостью, предложенной Гартманом и Лазарусом [1].

Лундквист [2] предположил, что переход от ламинарного режима течения к турбулентному происходит при определенном значении параметра R/M и что β не входит в этот критерий. Результаты экспериментов позволяют считать, что критические условия для перехода от ламинарного режима течения к турбулентному наступают при $R/M \approx 900$, но поскольку использовалась только одна жидкость, определить влияние β было невозможно.

§ 1. Исследования Гартмана и Лазаруса

Решение уравнений движения для полностью развитого ламинарного течения вязкой электропроводной жидкости между параллельными плоскостями при наличии поперечного магнитного поля получено Гартманом [3]. В соответствии с теорией Гартмана при наложении магнитного поля профиль скорости делается более плоским и увеличивается касательное напряжение на стенке, в результате чего увеличивается градиент давления, необходимый для получения того же самого расхода.

Гартман и Лазарус [1] выполнили ряд экспериментов по исследованию течений ртути в каналах прямоугольного сечения и круглых трубках при наличии наложенного

поперечного магнитного поля. Они построили серию кривых зависимости градиента давления от напряженности поля при постоянных объемных расходах. Если при отсутствии магнитного поля течение было ламинарным, то наложение поля приводило к увеличению градиента давления в соответствии с теорией Гартмана. Если же при отсутствии магнитного поля течение было турбулентным, то увеличение напряженности поля приводило к уменьшению градиента давления до некоторого определенного значения, после чего он вновь увеличивался и в конечном счете приходил в соответствие с величиной, определяемой по теории Гартмана.

Авторы предположили, что наблюдаемое в турбулентной области явление обусловлено этим эффектом Гартмана и прогрессивным гашением турбулентности магнитным полем. Чтобы отделить указанные эффекты, они использовали допущение о том, что гашение турбулентности пропорционально H^2 , где H — напряженность магнитного поля. Исходя из этого и некоторых других предположений, авторы пришли к выводу, что уменьшение градиента давления Δp_r , обусловленное гашением турбулентности, пропорционально H^2/d , где d — диаметр трубы, и не зависит от средней скорости течения u . Авторы пытались подтвердить этот вывод с помощью анализа размерностей, предположив, что уменьшение градиента давления является функцией H , d и u .

Если рассматривается стационарный процесс и свободные поверхности отсутствуют, то характер магнито-гидродинамического течения жидкого металла в канале зависит от семи величин H , d , u , ρ , η , σ , μ , где d — характерная длина (для канала с большой величиной отношения сторон в качестве d берется полуширина канала), ρ , η , σ , μ — соответственно плотность, динамическая вязкость, электропроводность и магнитная проницаемость жидкости. При обработке экспериментальных данных, относящихся к течениям в канале, особенно полезными оказываются следующие безразмерные комбинации параметров:

$$R = \frac{4\rho u d}{\eta}, \quad M = \mu H d \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}, \quad \beta = \frac{4\pi\mu\sigma\eta}{\rho}.$$

Здесь R — обычное число Рейнольдса, а величина β характеризует свойство жидкости, которое, как указал Бэтчелор [4], служит важным критерием усиления малых возмущений магнитного поля. Величина β есть отношение двух коэффициентов диффузии, и в этом смысле она аналогична числу Прандтля.

В анализе размерностей, выполненном Гартманом и Лазарусом, молчаливо допускается, что Δp_r не зависит от η и σ . Для течения с сильно развитой турбулентностью (в их экспериментах такой режим не был достигнут) по аналогии с обычной гидродинамикой можно допустить, что эта величина не зависит от η , однако нет оснований предполагать ее не зависящей от σ .

§ 2. Методы экспериментального исследования и результаты

а. Экспериментальная установка

Целью настоящего эксперимента было изучение зависимости между градиентом давления, средней скоростью течения и напряженностью поля при турбулентном течении ртути в канале при наличии поперечного магнитного поля. Предшествующая работа Гартмана и Лазаруса выполнялась при числах Рейнольдса, не превышающих 5500, и, таким образом, результаты едва выходили за пределы переходной области. Описываемая установка была спроектирована с таким расчетом, чтобы получать на ней числа Рейнольдса вплоть до 10^5 , и в то же время обеспечивать более высокие значения M , чем те, которые достижимы на установке Гартмана и Лазаруса.

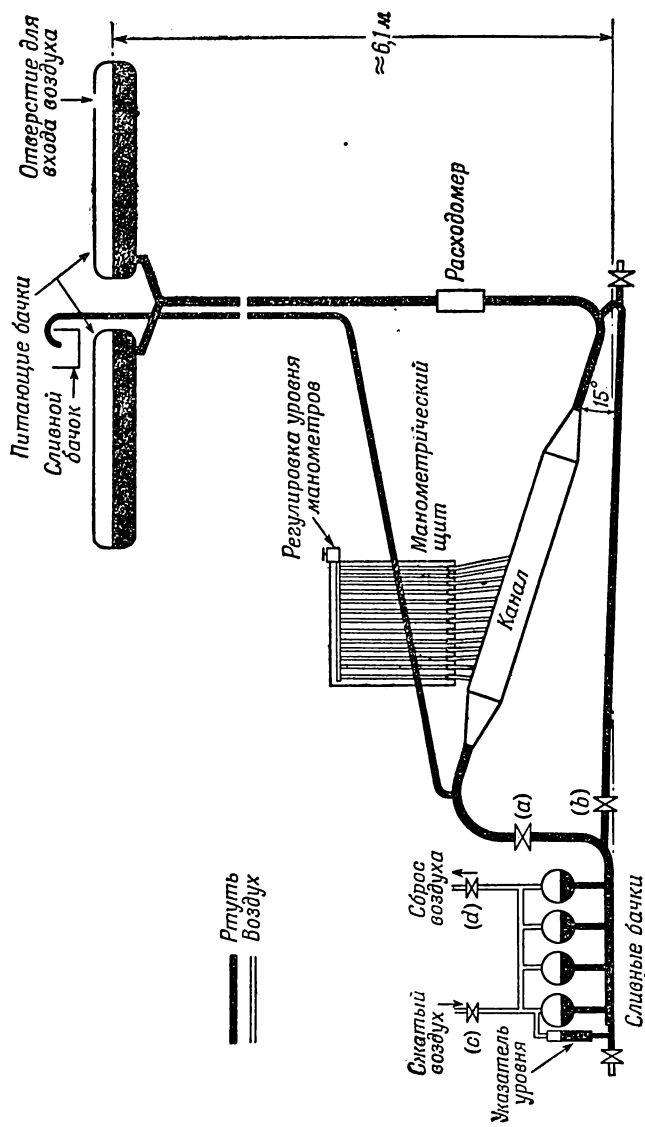
Канал был выполнен из плит немагнитной нержавеющей стали, изолированных изнутри покрытием «Agaldite». Длина канала равнялась 914,4 мм, а внутреннее поперечное сечение — $101,6 \times 6,756$ мм. Ширина канала (6,756 мм) измерялась во многих точках с помощью микрометра; отклонение от средней величины было менее 0,075 мм. По длине рабочей части ширина канала оставалась постоянной с точностью до 0,025 мм. В верхней крышке канала были аккуратно просверлены и обработаны протяжкой двадцать одно отверстие для замера статического давления.

Давление измерялось при помощи батарейного манометра. Вследствие того, что использовалась подача самотеком, среднее значение статического давления в гидравлической цепи в течение каждого опыта изменялось. По этой причине верхние концы манометрических трубок подсоединялись через коллектор к небольшому закрытому резервуару, причем весь объем над ртутью был заполнен дистиллированной водой, из которой полностью удален воздух.

Величина объемного расхода измерялась с помощью магнитного расходомера, состоящего из изолированной трубки, помещенной в поперечное магнитное поле. На участках стенки трубки, расположенных на противоположных концах диаметра, перпендикулярного к направлению течения и поля, были помещены два электрода. Выходной сигнал расходомера измерялся при помощи потенциометра, а тарировка прибора осуществлялась путем измерения расхода жидкости за единицу времени. Точность тарировки, по-видимому, составляла $\pm 1,5\%$.

Гидродинамический контур схематически изображен на фиг. 1. Дистиллированная ртуть заливалась в четыре баллона из-под кислорода, расположенные горизонтально на высоте около 6,1 м над основанием установки. После открытия крана (а) ртуть проходила через расходомер и канал и поступала в сливные бачки. В конце каждого опыта ртуть из сливных бачков выталкивалась сжатым воздухом обратно в питающие бачки через кран (б). Наличие наклона канала в 15° и регулировочной трубы гарантирует полное заполнение ртутью канала и манометров в конце каждого опыта. Весь контур был спроектирован таким образом, чтобы исключить попадание в него воздуха, так как присутствие воздуха может привести в конечном счете к вытеснению ртути из одного из манометров. Удаление остатков воздуха было сопряжено с большими трудностями.

Поперечное магнитное поле создавалось калиброванным электромагнитом, имеющим полюсные наконечники размером $30,5 \times 12,7$ см и зазор, равный 2,54 см. В результате контрольного измерения распределения магнитного поля в зазоре было найдено, что поле однородно в пределах $\pm 1,5\%$. Рабочий участок канала длиной

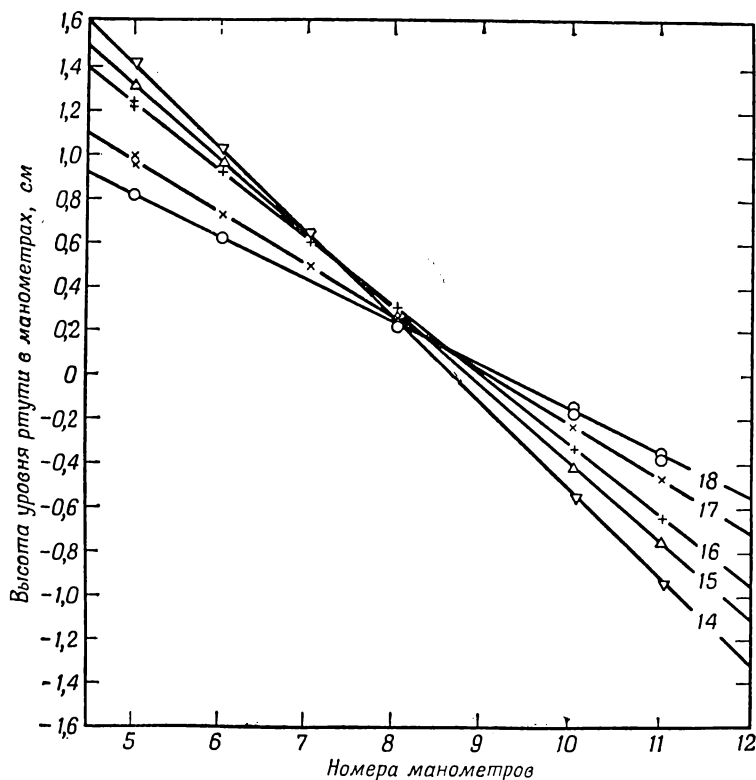


Фиг. 1. Схема гидродинамического контура.

30,5 см помещался между полюсными наконечниками магнита; входной участок длиной 61 см, используемый для получения полностью развитого турбулентного течения, оставался вне магнитного поля.

6. Результаты экспериментов

В ходе опытов было установлено, что градиент давления в средней части рабочего участка канала на длине



Фиг. 2. Градиенты давления в опытах 14–18.

15,3 см оставался постоянным и быстро увеличивался на периферии. Вероятно, это было обусловлено влиянием

концевых токов, о которых упоминали Гартман и Лазарус. Поскольку время проведения каждого опыта было ограничено, считалось наиболее целесообразным сосредоточить внимание на указанном участке с постоянным градиентом давления. Показания манометров от 5 до 11 снимались в произвольном порядке, при этом важно было получить повторные показания по крайней мере

Таблица

$R \cdot 10^{-5}$	M	$C_f \cdot 10^3$	$R \cdot 10^{-5}$	M	$C_f \cdot 10^3$
1,21	0	4,27	0,88	120,5	11,2
1,22	22,0	4,32	0,87	128,8	12,0
1,21	31,0	4,48	0,80	0	4,81
1,21	60,3	5,31	0,80	11,5	4,65
1,21	66,8	5,58	0,81	24,2	4,87
1,22	86,5	6,39	0,80	35,9	5,31
1,21	99,8	7,02	0,80	46,2	5,74
1,21	112,5	7,67	0,80	51,9	6,03
1,21	125,5	8,33	0,80	80,3	8,11
1,21	129,0	8,80	0,81	115,0	11,73
1,01	0	4,58	0,70	0	4,99
1,02	14,3	4,41	0,70	20,3	4,90
1,02	32,6	4,72	0,70	29,0	5,00
1,02	40,7	4,98	0,705	42,4	5,82
1,01	49,2	5,17	0,705	48,4	6,29
1,01	72,2	6,41	0,70	60,0	7,24
1,00	105,8	8,51	0,70	110,5	13,81
1,00	118,5	9,36	0,70	124,7	14,32
1,01	130,5	10,32	0,30	0	5,95
0,88	0	4,67	0,30	5,2	5,81
0,88	0	4,63	0,30	10,4	5,86
0,88	23,0	4,72	0,30	18,0	6,01
0,88	30,0	4,87	0,30	26,0	7,05
0,88	42,1	5,35	0,30	63,1	17,1
0,87	75,7	7,38	0,10	0	7,73
0,87	99,3	7,49	0,10	5,4	5,67
0,87	105,8	9,85	0,10	10,4	9,27
			0,10	46,0	37,0

с манометров 5 и 11. Типичные кривые градиента давления приведены на фиг. 2. Там, где для манометров 5 и 11 показана только одна точка, повторные показания совпали с первоначальными.

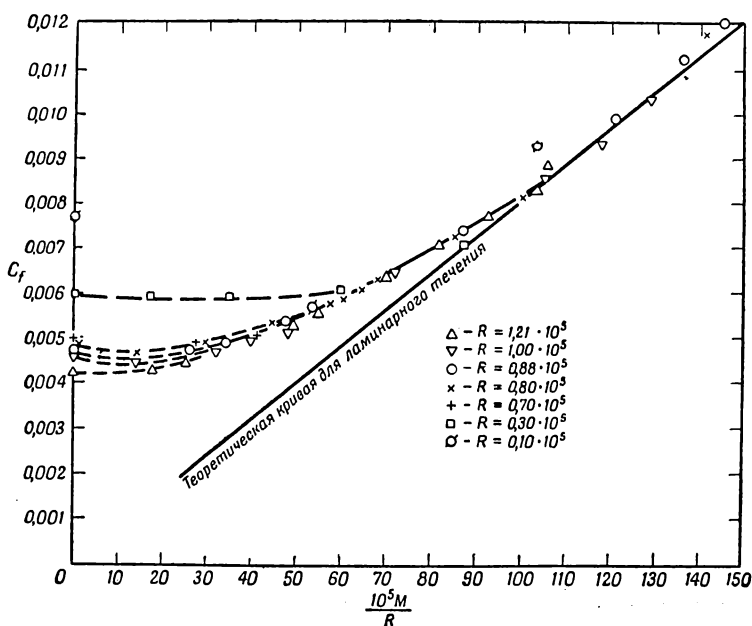
Полный перечень результатов экспериментов дан в безразмерной форме в приведенной ниже таблице. Здесь C_f — обычный коэффициент сопротивления, определяемый из формулы $\tau_0 = C_f \cdot \rho u^2/2$, где τ_0 — напряжение трения на стенке.

в. Обсуждение результатов

На фиг. 3 показан график зависимости C_f от M/R , обладающий некоторыми интересными свойствами. За исключением точек, соответствующих двум малым числам Рейнольдса (они известны с меньшей точностью ввиду малого градиента давления), экспериментальные точки при достаточно больших значениях M/R хорошо ложатся на одну кривую. Эта кривая плавно приближается к прямой, полученной Гартманом для ламинарного течения. Такой вид кривой сопротивления, по-видимому, свидетельствует о том, что турбулентность гасится не сразу и что если она и гасится, то настолько медленно, что ее влияние на C_f подавляется эффектом Гартмана. Установлено, что в пределах погрешности эксперимента течение, по-видимому, является ламинарным при $R < 900 M$. Интересно, что таким путем ламинарное течение можно получить даже при $R = 10^5$.

Анализ фиг. 3 показывает, что при более высоких числах Рейнольдса C_f стремится стать функцией от M/R и что область значений M/R , для которой справедлива такая зависимость, расширяется при увеличении R . Можно предположить, что при достаточно больших R коэффициент сопротивления C_f является функцией только от M/R и β . Тогда, если при больших значениях R силами вязкости можно пренебречь по сравнению с другими силами, из анализа размерностей следует, что C_f должно быть функцией от двух комбинаций: $(M/R\beta^{1/2})$ и $(R\beta)$. Если C_f должно быть функцией от (M/R) и β , то эта функция должна зависеть только от комбинации $(M/R\beta^{1/2})$. Интересно отметить, что эта величина не содержит параметров, характеризующих диссипацию, и

фактически равна квадратному корню из отношения магнитной и кинетической энергии в единице объема. Данное предположение представляет собой обобщение соотношения, постулированного Гартманом и Лазарусом.



Фиг. 3.

Гартман и Лазарус представили эту зависимость в простом виде и, кроме того, не ограничили область ее применения большими числами Рейнольдса, хотя их попытки выделить эффект Гартмана равносильны пренебрежению непосредственным действием вязкости. Исключение из анализа размерностей величины σ было необоснованным.

На первый взгляд может показаться странным, что критерий $(M/R\rho^{1/2})$ не содержит σ и, следовательно, эти рассуждения могут в равной мере относиться и к непроводящей жидкости. Однако следует напомнить, что M и

R могут входить раздельно в условия, определяющие применимость таких рассуждений. Эти условия пока еще не определены.

В недавно опубликованной работе [2] предполагается, что переход от ламинарного режима течения к турбулентному происходит при некотором критическом значении числа Рейнольдса течения в пограничном слое $R'_{кр}$ ($R' = 4\rho u L'/\eta$, где L' — характерный размер для пограничного слоя). В принятых обозначениях $L' = d/M$ и, таким образом, $R'_{кр} = (R/M)_{кр}$ и не зависит от β . Из фиг. 3 видно, что обратный переход (т. е. от турбулентного режима течения к ламинарному) происходит приблизительно при $R/M = 900$; однако ввиду того, что в экспериментах использовалась только одна жидкость, не представляется возможным сделать какой-либо вывод относительно независимости точки перехода от β .

Сущность аргументации Лундквиста состоит в том, что магнитогидродинамические силы важны лишь постольку, поскольку они определяют толщину пограничного слоя и профиль скорости в нем, и что они никаким другим образом не входят в критерий устойчивости. Следовательно, параметр β не оказывает влияния на устойчивость. Весьма желательно провести аналогичные эксперименты с другими жидкостями, меняя таким образом величину β .

Автор пытался отделить эффект Гартмана от эффекта гашения турбулентности более точным методом, чем это делали Гартман и Лазарус. Суть метода состоит в использовании уравнений Гартмана в магнитогидродинамическом пограничном слое, т. е. пристеночном слое, в котором существенны только электромагнитные и вязкие силы. Для напряжения трения на двух границах слоя получается соотношение, в которое входят M , R и толщина слоя. Таким образом, зная градиент давления и отсюда градиент скорости на стенке, можно определить градиент скорости на внешней границе пограничного слоя и использовать его для оценки величины диссипации в турбулентном ядре. Однако полученные результаты очень чувствительны к выбору толщины пограничного слоя, который пока остается произвольным. По-

этому нет смысла публиковать эти результаты до тех пор, пока не появятся дополнительные экспериментальные данные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hartmann J., Lazarus F., Det Kgl. Danske Videnskab. Selskab Math.-fys. Medd., 15, No 7 (1937).
2. Lundquist S., Arkiv f. Fysik, 5, 297 (1952).
3. Hartmann J., Det Kgl. Danske Videnskab, Selskab. Math.-fys. Medd., 15, No. 6 (1937).
4. Batchelor G. K., Proc. Roy. Soc., A201, 405 (1950).

6. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ РТУТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Б. Ленерт

B. Lehnert, Tellus, 4, No. 1, 63 (1952)

Рассматриваются два примера неламинарного течения электропроводной жидкости при наличии внешнего магнитного поля.

Введение

Во многих космических явлениях, происходящих, например, внутри Солнца, в межзвездном пространстве, внутри звезд, в ионосфере, а также в явлениях, связанных с космической радиацией, наличие магнитного поля приводит к возникновению сил, которые оказываются сравнимыми с другими силами. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы рассмотреть несколько частных примеров таких сил, действующих на жидкость при ее турбулентном движении.

Внешнее магнитное поле оказывает сильное влияние на характер течения электропроводной несжимаемой жидкости. Это влияние обусловлено тем, что при всяком движении, перпендикулярном к магнитному полю, индуцируется электрический ток, взаимодействие которого с магнитным полем вызывает силы, действующие на элементы жидкости. Можно показать, что взаимодействие соседних слоев жидкости определяется не только силами вязкости, но также и электромагнитными силами.

Ламинарное течение проводящей жидкости уже исследовалось теоретически и экспериментально Гартманом [1, 2], Альфвеном [3], Валеном [4], Лундквистом [5] и многими другими авторами. С другой стороны, изучению неламинарного режима течения до сих пор уделялось недостаточное внимание. Гартман [2] указал на некоторые аспекты такой задачи, а Бэтчелор [6] и Чанд-

расекар [7] рассмотрели вопрос о спектре магнитогидродинамической турбулентности.

Изучая течение ртути в каналах, помещенных в сильное магнитное поле, Гартман [2] обнаружил, что магнитное поле оказывает влияние на переход от ламинарного режима течения к турбулентному и на самотурбулентное течение.

Результаты измерений на вращающихся цилиндрах, приведенные в § 1. настоящей работы, согласуются с данными Гартмана, относящимися к неламинарному режиму течения, и, по-видимому, объясняются тем же эффектом, на который указывал Гартман, а именно гашением магнитным полем пульсаций в потоке.

Более подробное обсуждение можно найти в предыдущей работе [8].

В § 2 дан пример вихревого движения, которое в некоторых отношениях может быть аналогично вихревой дорожке Кармана [9].

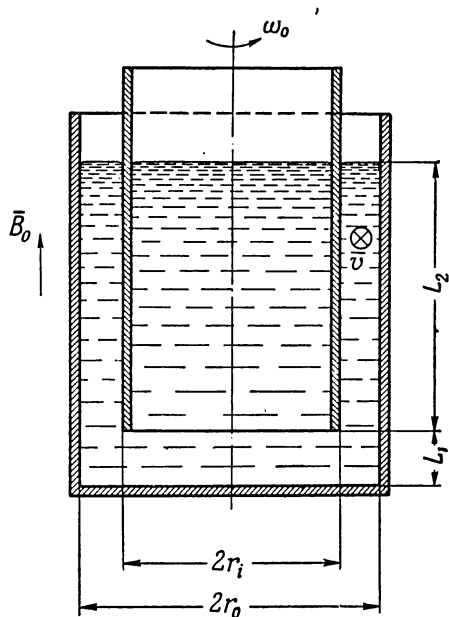
§ 1. Измерение кажущейся вязкости с помощью вращающихся цилиндров

Измерения проводились при помощи известного метода уравнивания момента, возникающего между двумя непроводящими концентрическими цилиндрами, один из которых неподвижен, а другой вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 . Пространство между цилиндрами заполнено ртутью; наложено внешнее магнитное поле \vec{B}_0 , параллельное оси (фиг. 1). Момент, действующий на неподвижный цилиндр, регистрируется при помощи упругой проволочки и зеркальца, которое отражает световой луч на шкалу. На фиг. 2 показаны результаты, соответствующие вращению наружного цилиндра, а на фиг. 3 — вращению внутреннего цилиндра.

Видно, что кривые, соответствующие чисто гидродинамическому случаю, заметно отличаются друг от друга. Согласно Тейлору [10], неустойчивость возникает раньше в случае вращения внутреннего цилиндра, чем при вращении внешнего цилиндра.

Удобно различать на этих кривых две области:

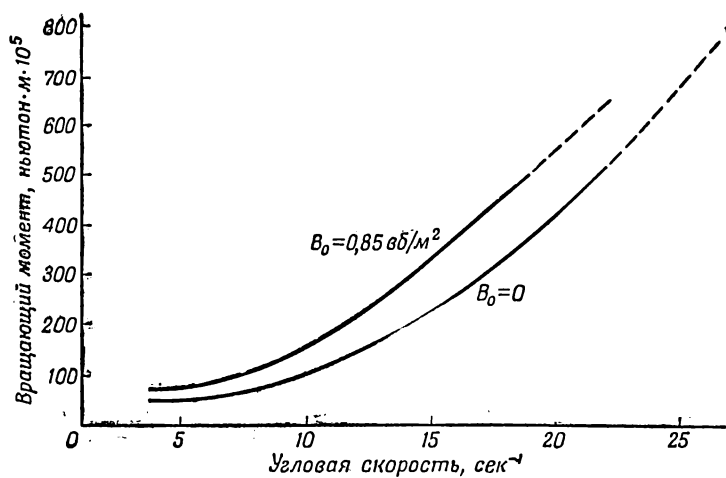
а) *Малые скорости.* При наличии магнитного поля возникает электрическая поляризация. В верхней части канала, где скорость \bar{v} изменяется в направлении поля незначительно, распределение скоростей практически не изменяется.



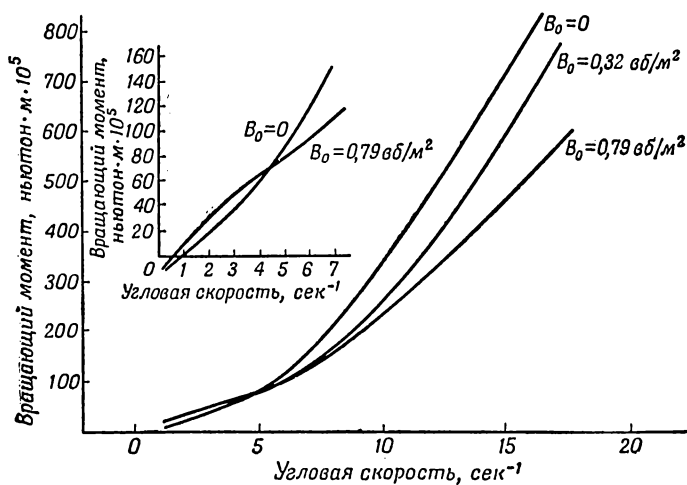
Фиг. 1. Коаксиальные цилиндры, вращающиеся с относительной угловой скоростью ω_0 .

Магнитное поле B_0 параллельно оси цилиндров, а вектор скорости \bar{v} лежит в плоскости, перпендикулярной к этой оси.

Однако в области между нижней кромкой внутреннего цилиндра и дном распределение скоростей, соответствующее чисто гидродинамическому случаю, при наложении магнитного поля существенно изменяется, в результате чего значительно возрастает момент. Так будет до тех пор, пока течение остается ламинарным. Но если вследствие этого концевое эффекта профиль скорости



Ф и г. 2. Зависимость вращающего момента от угловой скорости. Вращается наружный цилиндр; $r_i = 37 \text{ мм}$; $r_0 = 50,5 \text{ мм}$; $l_1 = 9 \text{ мм}$; $l_2 = 78 \text{ мм}$.



Ф и г. 3. Вращается внутренний цилиндр;
 $r_i = 37 \text{ мм}$; $r_0 = 50,5 \text{ мм}$; $l_1 = 11 \text{ мм}$; $l_2 = 95 \text{ мм}$.

станет отличным от ламинарного, то около стенок может образоваться тонкий пограничный слой, даже если при отсутствии поля течение является ламинарным.

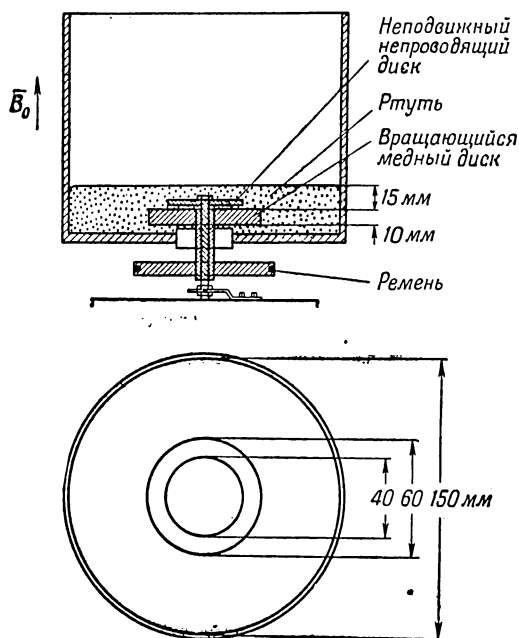
Очевидно, этим можно объяснить тот факт, что увеличение момента действительно становится довольно умеренным.

б) *Большие скорости.* Концевой эффект приводит к увеличению момента как в случае ламинарного, так и неламинарного режима. Но если режим течения является неламинарным, то магнитное поле может оказывать на момент второй эффект, который действует либо в том же направлении, что и концевой эффект, либо в противоположном. В первом случае магнитное поле всегда увеличивает момент, однако во втором случае суммарный эффект приведет к увеличению или уменьшению момента в зависимости от того, какой из вышеупомянутых эффектов окажется преобладающим. Как видно из фиг. 3, суммарный эффект приводит к уменьшению момента. Такой результат делает весьма правдоподобным предположение о том, что внешнее магнитное поле по крайней мере в некоторых случаях оказывает гасящее воздействие на неламинарное течение проводящей жидкости.

§ 2. Магнитогидродинамическое вихревое движение

Если в невязкой бесконечно проводящей жидкости возникает движение, то внешнее магнитное поле заставит его распространяться вдоль силовых линий поля; при этом во «внешних» областях жидкость останется невозмущенной. В жидкости, имеющей конечную, но большую проводимость и малую вязкость, это движение будет распространяться на периферию трубок тока, ограничивающих область, в которой возникло движение; однако если рассматриваемые трубки тока являются не очень длинными, то картина течения будет примерно такой же, как и в предыдущем случае. На фиг. 4 показан прибор, при помощи которого исследуется один частный вид движения. На дне сосуда располагается вращающийся медный диск, приводимый во вращение мотором. Ртуть заливается столько, чтобы ее поверхность была примерно на 15 мм выше поверхности медного

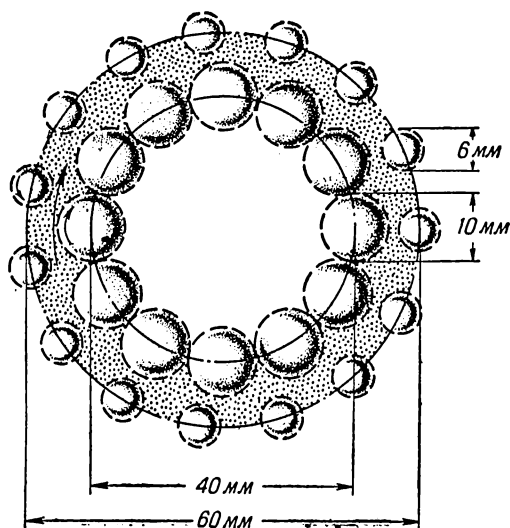
диска. Непосредственно над этим диском расположен тонкий неподвижный диск, изготовленный из непроводящего материала, который закрывает центральную часть медного диска. Магнитное поле направлено нормально к поверхности дисков.



Фиг. 4. Экспериментальная установка для исследования явления, изображенного на фиг. 5 и 6.

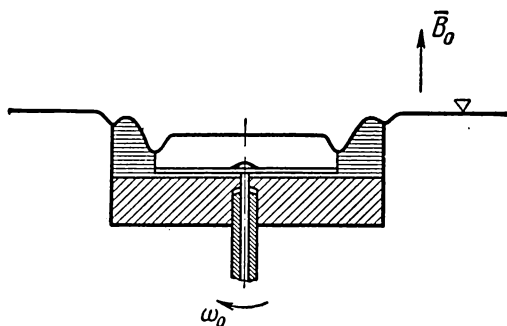
Ремень приводится в движение мотором. Магнитное поле $B_0 \approx 1 \text{ вб/м}^2$ (10^4 гс).

Если магнитное поле отсутствует, то при вращении медного диска движения на поверхности ртути не наблюдается. При наложенном магнитном поле в $1 \text{ в} \cdot \text{сек/м}^2$ (10^4 гс) на поверхности ртути наблюдается движение, показанное на фиг. 5а и фиг. 5б. Отметим следующее:



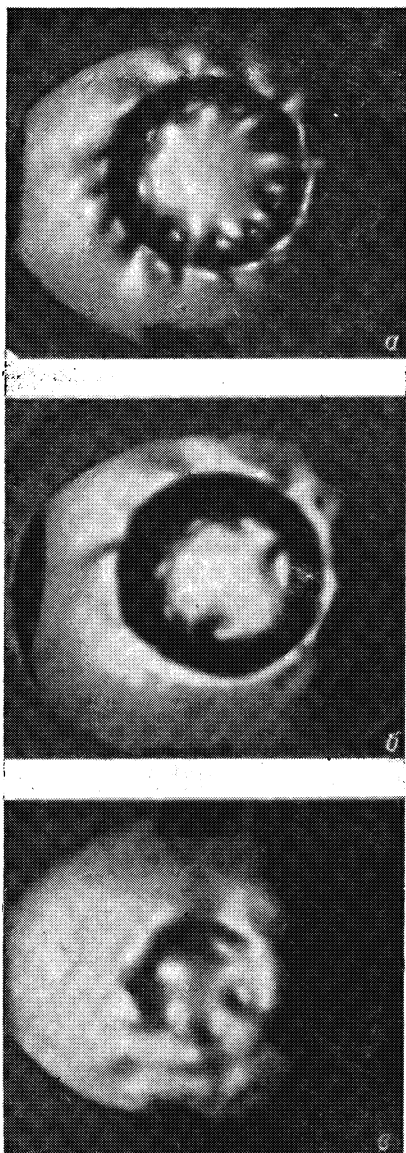
Ф и г. 5а. Эскиз поверхности, наблюдаемой со стороны верхней части сосуда, изображенного на фиг. 4.

Затемненная область вращается вместе с медным диском. Маленькие стрелки показывают направление вращения вихрей. Поле $B_0 = 1 \text{ вб/м}^2$ (10^4 гс). Угловая скорость $\omega = 6 \text{ сек}^{-1}$.



Ф и г. 5б. Поперечное сечение поверхности.

Затемненная область соответствует слоям, вращающимся вместе с медным диском. Неподвижным областям соответствует горизонтальная поверхность, а вихри изображены в виде углублений на границах раздела



1) В области, не перекрывающейся медным диском, и в области, закрытой неподвижным диском, ртуть покоится, тогда как все слои ртути, расположенные над незакрытой частью медного диска, образуют кольцевой цилиндрический слой, вращающийся с той же угловой скоростью, что и медный диск. На фиг. 6, б этой области соответствует темное кольцо.

2) Если линейные размеры выбраны соответствующим образом, то на движение цилиндрического слоя накладываются две вихревые дорожки, при этом центры вихрей расположены над краями дисков. Дорожки медленно движутся по окружности вдоль слоя; направление вращения вихрей соответствует направлению враще-

←

Фиг. 6. Вид поверхности: а) при ускоренном движении диска; б) при установившемся движении; ω_0 около 10 сек^{-1} ; в) при внезапной остановке диска; пять больших вихрей движутся по направлению к центру.

ния шариков в подшипниках, помещенных между движущейся и неподвижными областями.

На фиг. 6, *а* показана поверхность ртути при разгоне диска; вихри отчетливо выражены. Фиг. 6, *б* соответствует установившемуся движению с довольно большой угловой скоростью (около 10 сек^{-1}), а на фиг. 6, *в* показано движение нескольких больших вихрей к центру при внезапной остановке диска. При установившемся вращении с малыми угловыми скоростями картина движения аналогична изображенной на фиг. 6, *а*. На первый взгляд кажется, что такое образование аналогично вихревой дорожке Кармана [9] в обычной гидродинамике. Карман показал, что единственной устойчивой конфигурацией вихревых цепочек являются две цепочки с шахматным расположением центров вихрей. Однако имеется по крайней мере два различия между дорожками Кармана и явлением, изображенным на фиг. 6.

1) Положение вихрей одной цепочки не зависит от положения вихрей на другой цепочке; это видно из фиг. 6, *а*.

2) В магнитной гидродинамике существует устойчивая система, состоящая только из одной вихревой цепочки; если убрать неподвижный диск, то внешняя дорожка будет по-прежнему существовать. Это отчетливо проявляется при использовании медного диска с радиусом, примерно вдвое большим, чем в описанном эксперименте.

Оба рассмотренных примера служат убедительным доказательством важности эффектов магнитного поля для неламинарных течений в средах, имеющих такую же высокую электропроводность, как и ртуть. В космических явлениях, для которых характерны во много раз большие линейные размеры, условия для проявления магнитогидродинамических эффектов значительно более благоприятны, чем условия, которые когда-либо могут быть реализованы в лаборатории, и их воздействие будет оказывать еще большее влияние на течение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hartmann J., «Hg-Dynamics I», Math.-fys. Medd., 15, 6 (1937).
2. Hartmann J., Lazarus F., «Hg-Dynamics II», Math.-fys. Medd., 15, 7 (1937).
3. Alfén H., «On the existence of electromagnetic-hydro-dynamic wave», Arkiv f. Mat. Astr. o. Phys., B29, 2 (1942).
4. Walén C., «On the Theory of Sun-Spots», Arkiv f. Math. Astr. o. Phys., A30, 15; B31, 3 (1944).
5. Lundquist S., «Experimental Investigations of Magneto-Hydro-dynamic Waves», Phys. Rev., 76, 12, 1805 (1949).
6. Batchelor G. K., «On the spontaneous magnetic field in a conducting liquid in turbulent motion», Proc. Roy. Soc., London, A201, 405 (1950).
7. Chandrasekhar S., «The invariant theory of isotropic turbulence in magneto-hydrodynamics», Proc. Roy. Soc., London, A204, 435 (1951).
8. Lehnert B., «On the behaviour of an electrically conductive liquid in a magnetic field», Arkiv f. Fysik, 4, 30 (1951).
9. Kármán T., «Flüssigkeits-und Luftwider stand», Phys. Zs., 13, 49 (1911).
10. Taylor G. I., «Stability of a Viscous Liquid contained between two Rotating Cylinders», Phil. Trans., A223, 289 (1922).

Оглавление

Предисловие редакторов перевода	5
Из предисловия автора	9
Глава I. Исследование магнитогидродинамической турбулентности	13
Глава II. Турбулентное течение в каналах при отсутствии магнитного поля	23
§ 1. Полуэмпирический анализ	23
§ 2. Сравнение с экспериментом	29
§ 3. Коэффициент сопротивления	32
Глава III. Математические свойства турбулентного магнитогидродинамического течения в постоянном магнитном поле	35
§ 1. Основные уравнения	35
§ 2. Граничные условия	37
§ 3. Свойства симметрии	39
§ 4. Частное решение	43
Глава IV. Исследование турбулентного магнитогидродинамического течения с помощью теории размерностей	51
§ 1. Основные соотношения	51
§ 2. Коэффициент сопротивления	55
Глава V. Экспериментальные данные для турбулентных течений в постоянном магнитном поле	57
Глава VI. Связь теории с экспериментом	68
§ 1. Эмпирическое определение функции F_1 и F_2	68
§ 2. Аналитическое приближение для функции F_1	79

Глава VII. Дальнейшие выводы из теории	83
§ 1. Профили скорости и коэффициент сопротивления	83
§ 2. Распределение токов	91
§ 3. Корреляции скорости	93
Глава VIII. Приближенный анализ ламинарного течения в бегущем магнитном поле	98
§ 1. Постановка задачи	98
§ 2. Граничные условия и условия симметрии	99
§ 3. Основные уравнения течения в бегущем магнитном поле	100
§ 4. Приближенное решение	105
§ 5. Приближенные формулы для определения мощно- сти	112
Глава IX. Турбулентное течение в бегущем магнитном поле	117
§ 1. Основные уравнения	117
§ 2. Аналогия между течениями в бегущем и по- стоянном магнитных полях	124
Глава X. Выводы и рекомендации для дальнейшей работы	130
Литература	137

ДОПОЛНЕНИЕ

1. Дж. Капур, Р. Джайн. Магнитогидродинамическое турбулентное течение между параллельными пла- стинами	141
Введение	141
§ 1. Основные уравнения	142
§ 2. Постановка задачи	144
§ 3. Решение задачи	146
2. Л. Наполитано. Турбулентные магнитогидродинами- ческие пограничные слои	152
Введение	152
§ 1. Линеаризованные уравнения магнитной гидро- динамики	153

§ 2. Линеаризованные уравнения турбулентного течения в магнитной гидродинамике. Уравнения энергии	156
§ 3. Построение модели турбулентного пограничного слоя	159
§ 4. Законы стенки и поверхностного трения	164
§ 5. Определение констант, появляющихся в модифицированных законах	168
§ 6. Анализ результатов и заключительные замечания	176
Выводы	180
Приложение. Решение основных уравнений	181
Обсуждение	184
3. П. Ликодис. Переход ламинарного течения в трубе в турбулентное в магнитной гидродинамике	186
§ 1. Введение	186
§ 2. Ламинарный подслой	187
§ 3. Критерий перехода ламинарного течения в турбулентное	191
§ 4. Турбулентная область	192
4. Ю. Гартман, Ф. Лазарус. Экспериментальное исследование течения ртути в однородном магнитном поле	196
Введение	196
I. Экспериментальная установка	197
§ 1. Принципиальная схема установки	197
§ 2. Измерение расхода ртути	199
§ 3. Электромагнит	202
§ 4. Исследуемые трубки и каналы	204
II. Результаты экспериментов и их обсуждение	208
§ 1. Результаты экспериментов	208
§ 2. Сравнение с теорией	216
§ 3. Течение при отсутствии магнитного поля	218
§ 4. Модификация функции $f(z_0)$, приводящая к лучшему соответствию между теоретическими и экспериментальными данными	221
§ 5. Кривая, разграничивающая области ламинарного и турбулентного течений	226

Приложение I. Проверка закона подобия Рейнольдса . .	228
Приложение II. Влияние магнитного поля на турбулентное течение	231
5. В. Мергетройд. Экспериментальное исследование магнитогидродинамического течения в канале . . .	238
§ 1. Исследования Гартмана и Лазаруса	238
§ 2. Методы экспериментального исследования и результаты	240
а. Экспериментальная установка	240
б. Результаты экспериментов	243
в. Обсуждение результатов	245
6. Б. Ленерт. Экспериментальное исследование неламинарного течения ртути в магнитном поле	249
Введение	249
§ 1. Измерение кажущейся вязкости с помощью вращающихся цилиндров	250
§ 2. Магнитогидродинамическое вихревое движение	253

Л. Гаррис
Магнито-
гидродинамические
течения в каналах

Редакторы *Б. Б. Гиль* и *И. Н. Ульяновский*
Переплет художника *М. Г. Ровенского*
Технический редактор *М. П. Грибова*
Корректор *А. В. Шацкая*

Сдано в производство 25/III 1963 г.

Подписано к печати 17/X 1963 г.

Бумага $84 \times 108^{1/32} = 4,1$ бум. л.

13,5 печ. л.

Уч.-изд. л. 11,5. Изд. № 2/1962.

Цена 1 р. 01 к. Зак. 1272.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
Москва, Ново-Алексеевская, 52.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УЦБ и ПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

